Lycée pilote -Sfax	Devoir de contrôle N°1	Classe : $2Sc_{3-5}$
M^me Fehri	Mathématiques	Durée : 1heure

Algèbre : 12points

I/1/ Vérifier que pour tout réel x : $x^2-6x+6=(x-3)^2-3$.

2/ Résoudre dans IR l'équation $x^3-8+7x(2-x)=x^2-4x+4$.

3/ On donne $|x|<2$, encadrer x^2-6x+6.

II/ On donne $a=\sqrt{14-6\sqrt{5}}$ et $b=\dfrac{\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}-\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$

1/ Ecrire a sous la forme $x-\sqrt{y}$ où x et y sont deux entiers.

2/ Ecrire b sans radical au dénominateur.

3/ Montrer que a et b sont des inverses.

III/ Soit n un entier naturel non nul.

1/ Montrer que $1-\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n+1}{n}$

2/ Calculer alors $P=\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\times\ldots\ldots\times\left(1-\dfrac{1}{100^2}\right)$.

IV/1/ Soit x un réel strictement positif, montrer que $\sqrt{x}\leq\dfrac{x+1}{2}$.

2/ En déduire que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{\sqrt{4}}{5}+\ldots\ldots+\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}\leq\dfrac{n}{2}$.

Géométrie : 8points

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on donne les points A(3,-2) ; B(0,-1) ; C(4,1) et D(-2,3).

1/ Montrer que BCD est un triangle rectangle et isocèle.

2/ Montrer que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est une base de l'ensemble des vecteurs du plan.

3/ Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles puis déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AD}$ dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

4/ Soit E le point défini par : $-6\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}=\vec{0}$.

a/ Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AE}$ dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

b/ En déduire que les points A, D et E sont alignés.

5/ Soit x un réel et M(x, 2x+1), déterminer x pour que le point M appartient à la perpendiculaire à (AC) passant par B.

Devoir de Contrôle N°1

Exercice 1 : (Algèbre 12 pts)

I/ 1) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$(x-3)^2 - 3 = x^2 - 6x + 9 - 3 = x^2 - 6x + 6$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 6x + 6 = (x-3)^2 - 3$.

2) $x^3 - 8 + 7x(2-x) = x^2 - 4x + 4$

équivaut à : $(x-2)(x^2+2x+4) - 7x(x-2) = (x-2)^2$

équivaut à : $(x-2)(x^2+2x+4-7x) - (x-2)^2 = 0$

équivaut à : $(x-2)(x^2+2x+4-7x-x+2) = 0$

équivaut à : $(x-2)(x^2-6x+6) = 0$

équivaut à : $x-2=0$ ou $(x-3)^2-3=0$

$x=2$ ou $x-3=\sqrt{3}$ ou $x-3=-\sqrt{3}$

$x=2$ ou $x=3+\sqrt{3}$ ou $x=3-\sqrt{3}$

Donc $S_{\mathbb{R}} = \{3-\sqrt{3}\ ;\ 2\ ;\ 3+\sqrt{3}\}$

$|x| < 2$ équivaut à $-2 < x < 2$

$-5 < x-3 < -1$

$1 < (x-3)^2 < 25$

$-2 < (x-3)^2 - 3 < 22$

Donc $-2 < x^2 - 6x + 6 < 22$

c'est un encadrement de x^2-6x+6 d'amplitude 24.

II/ 1) $a = \sqrt{14 - 6\sqrt{5}} = \sqrt{3^2 + \sqrt{5}^2 - 2 \times 3 \times \sqrt{5}}$

$= \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} = |3-\sqrt{5}|$

Donc $a = 3 - \sqrt{5}$ $\quad (3 > \sqrt{5})$

2) $b = \dfrac{\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} - \dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$

$= \dfrac{\sqrt{5}(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} - \dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$

$= \dfrac{3\sqrt{5}+5}{4} - \dfrac{2\sqrt{5}+2}{4} = \dfrac{\sqrt{5}+3}{4}$

Donc $b = \dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$

3) $a \cdot b = (3-\sqrt{5}) \cdot \dfrac{3+\sqrt{5}}{4} = 1$

Donc a et b sont des inverses

Bel Modo di Vivere

III/ 1) $1-\frac{1}{n^2}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}$

2) $P=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\dots\times\left(1-\frac{1}{99^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{100^2}\right)$

$=\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)\times\dots\times\left(\frac{98}{99}\times\frac{100}{99}\right)\times\left(\frac{99}{100}\times\frac{101}{100}\right)$

$=\left[\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\dots\times\frac{98}{99}\times\frac{99}{100}\right]\times\left[\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\dots\times\frac{100}{99}\times\frac{101}{100}\right]$

$=\frac{1}{100}\times\frac{101}{2}$ Donc $P=\frac{101}{200}=0{,}505$

IV/ 1) $\frac{x+1}{2}-\sqrt{x}=\frac{x+1-2\sqrt{x}}{2}=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2}$

$(\sqrt{x}-1)^2\geq 0$ et $x>0$ Donc $\sqrt{x}\leq\frac{x+1}{2}$

2) Pour tout $x>0$, $\sqrt{x}<\frac{x+1}{2}$ Donc $\frac{\sqrt{x}}{x+1}<\frac{1}{2}$ $(x+1>0)$

$\{1;2;\dots;n\}\subset\mathbb{N}^*$ Donc $\frac{\sqrt{1}}{2}<\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{3}<\frac{1}{2}$ … et $\frac{\sqrt{n}}{n+1}<\frac{1}{2}$

Donc $\frac{\sqrt{1}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{3}+\dots+\frac{\sqrt{n}}{n+1}<\frac{1}{2}\times n$.

Exercice 2 : (Géométrie 8 pts)

1) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$

Donc $BC=BD=\sqrt{20}$ et $xx'+yy'=4(-2)+2\times4=0$

Donc $BC=BD$ et $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{BD}$

Par suite le triangle BCD est rectangle isocèle en B

2) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

$xy'-x'y=-9-1=-10\neq0$

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

Par suite le couple $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ est une base de $\mathcal{V}$.

3) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$ Donc $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}$

Par conséquent $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et $(CD)\parallel(AB)$

b) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$

$=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Donc $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}_{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})}$

4) a) $6\vec{EA} + 2\vec{EB} + \vec{EC} = \vec{0}$

$= 6\vec{EA} + 2(\vec{EA} + \vec{AB}) + (\vec{EA} + \vec{AC}) = \vec{0}$

$= 9\vec{EA} + 2\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{0}$

$\vec{AE} = \frac{2}{9}\vec{AB} + \frac{1}{9}\vec{AC}$ Donc $\vec{AE}\begin{pmatrix} 2/9 \\ 1/9 \end{pmatrix}_{(\vec{AB}, \vec{AC})}$

b) $\vec{AD}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{(\vec{AB}, \vec{AC})}$ et $\vec{AE}\begin{pmatrix} 2/9 \\ 1/9 \end{pmatrix}_{(\vec{AB}, \vec{AC})}$

$\vec{AD} = 9\vec{AE}$ (On peut calculer le déterminant)

Ensuite A, D et E sont alignés.

5) M appartient à la perpendiculaire à (AC) passant par B. Donc $\vec{BM} \perp \vec{AC}$

Comme $\vec{BM}\begin{pmatrix} x \\ 2x+2 \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j})}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j})}$

et puisque $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée

Alors $aa' + bb' = 0$

$x \times 1 + 3 \times (2x + 2) = 0$

$x = -\frac{6}{7}$

Donc pour $x = -\frac{6}{7}$, le point M appartient à la perpendiculaire à (AC) passant par B.

Dans ce cas M a pour coordonnées $\left(-\frac{6}{7} ; \frac{2}{7}\right)$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$