L-P-F-H-Sfax : 2sc	Série d'exercices	Mr H... ...em

Exercice 1 :

1) Montrer que le produit de deux entiers naturels consécutifs est un entier pair

2) Déduire que pour tout entier naturel non nul n, l'entier $(n^4 - n^2)$ est divisible par 4

3) Soit $x = 9n + 5$ et $y = 4n + 1$, $n \in IN$

a) Montrer que si d divise x et y alors d divise 11

b) Déduire PGCD(7205,3201)

c) On suppose que le reste de la division euclidienne de n par 11 est égal à 8, déterminer $PGCD(x; y)$

Exercice 2 :

1) Soit n un entier naturel non divisible par 3

Montrer que l'entier $(n^2 - 1)$ est divisible par 3

2) Soit a , b et c trois entiers naturels non divisible par 3

Montrer que l'entier$(a^2 + b^2 + c^2)$ est divisible par 3

Exercice 3 :

Soit n un entier naturel

On pose $a = n^2 + 1$ et $b = n^2 + 9$

1) Déterminer les valeurs de n pour les quelles a divise b

2) a) Montrer que si n est impair alors $PGCD(a; b) = 2$

b) Montrer que si n est pair alors a et b sont premiers entre eu:

Exercice 4 :

Soit p et q deux entiers naturels non nuls

On pose $x = \frac{1}{2}p + 1$ et $y = 4q + 2$

Déterminer les couples $(p; q)$ pour les quels $xy = 119$

Exercice 5 :

Soit le polynome P défini par $P(x) = x^4 - x^2 + x + 0{,}5$

Montrer que le polynome P n'admet pas de racines positives

Exercice 6 :

Soit n un entier naturel

1) *Montrer que* $(n^3 + 5n)$ *est divisible par 2*

2) *Montrer que* $(n^3 + 5n)$ *est divisible par 3*

3) *Déduire que* $(n^3 + 5n)$ *est divisible par 6*

Exercice 7 :

Soit a, b et c des entiers naturels

La division euclidienne de a par 14 donne b comme quotient et c comme reste

La division euclidienne de a par 12 donne c comme quotient et b comme reste

Déterminer a, b et c

Exercice 8 :

Le dividende d'une division euclidienne est inférieur à 5000

Le quotient de cette même division est égal à 93 et le reste est 51

Déterminer les valeurs possibles du dividende et du diviseur

Lycée Pilote F-H-Sfax — 2 sc

Serie d'exercices (Arithmétiques)

Mr Hadj Kacem

Exercice 1 :

1) Soit n un entier naturel.

Si $n = 2k$; $(k \in \mathbb{N})$ alors $n(n+1) = 2k(2k+1)$

Comme $k(2k+1) \in \mathbb{N}$ alors $n(n+1)$ est pair

Si $n = 2k+1$; $(k \in \mathbb{N})$ alors $n(n+1) = (2n+1)(2n+2) = 2(2k+1)(k+1)$

Comme $(2k+1)(k+1) \in \mathbb{N}$ alors $n(n+1)$ est aussi pair

Conclusion : Le produit de deux entiers naturels consécutifs est toujours pair.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$n^4 - n^2 = n^2(n^2-1) = n(n-1) \cdot n(n+1)$$

$n(n-1)$ est le produit de deux entiers naturels consécutifs

Donc $n(n-1) = 2p$; $(p \in \mathbb{N})$ et $n(n+1)$ est le produit de deux entiers naturels consécutifs donc $n(n+1) = 2q$; $q \in \mathbb{N}$

Alors $n^4 - n^2 = 2p \cdot 2q$

$= 4pq$, comme $pq \in \mathbb{N}$ alors $(n^4 - n^2)$ est divisible par 4.

3) $x = 9n + 5$ et $y = 4n+1$ $(n \in \mathbb{N})$

a) d divise x, d divise y } Alors d divise $|4x - 9y|$

Donc d divise 11, $(4x - 9y = 11)$

b) $7205 = 9 \times 800 + 5$ et $3201 = 4 \times 800 + 1$

$7205 = 9n + 5$ et $3201 = 4n + 1$ tel que $n = 800 \in \mathbb{N}$

si $d = PGCD(7205, 3201)$ Alors $d = 1$ ou $d = 11$

7205 et 3201 sont tous les deux divisibles par 11

Donc $PGCD(7205 ; 3201) = 11$

c) $n = 11h + 8$; $(h \in \mathbb{N})$

Donc $x = 9(11h+8) + 5 = 11(9h+7)$ Donc x divisible par 11

et $y = 4n + 1 = 4(11h+8) + 1 = 11(4h+3)$ Donc y divisible par 11

Si $D = PGCD(x, y)$ Alors $d = 1$ ou $d = 11$
Comme x et y sont divisibles par 11 Alors $PGCD(x, y) = 11$

Exercice 2 :

1) n un entier naturel non divisible par 3
Donc le reste de la division euclidienne de n par 3 est 1 ou 2
D'où $n = 3h + 1$ ou $n = 3h + 2$ tel que $h \in \mathbb{N}$
Alors $n^2 - 1 = (3h+1)^2 - 1 = 3(3h^2 + 2h)$ ou $n^2 - 1 = (3h+2)^2 - 1 = 3(3h^2 + 4h + 1)$
Comme $(3h^2 + 2h) \in \mathbb{N}$ et $(3h^2 + 4h + 1) \in \mathbb{N}$ Alors
$(n^2 - 1)$ est divisible par 3.

2) a ; b et c trois entiers naturels non divisibles par 3
D'après 1) $a^2 - 1 = 3x$; $b^2 - 1 = 3y$ et $c^2 - 1 = 3z$, $\{x; y; z\} \subset \mathbb{N}$
Donc $a^2 + b^2 + c^2 = 3x + 1 + 3y + 1 + 3z + 1$
$= 3(x + y + z + 1)$
or $(x + y + z + 1) \in \mathbb{N}$ donc $(a^2 + b^2 + c^2)$ est divisible par 3.

Exercice 3 :

$a = n^2 + 1$ et $b = n^2 + 9$ tel que $n \in \mathbb{N}$

1) a divise b
a divise a } Donc a divise $(b - a)$
Alors a divise 8.
Donc $a \in \{1 ; 2 ; 4 ; 8\}$.
$a = 1$ Donc $n^2 + 1 = 1$ d'où $n = 0$ Donc $a = 1$ et $b = 9$ (acceptable)
$a = 2$ Donc $n^2 + 1 = 2$ d'où $n = 1$ Donc $a = 2$ et $b = 10$ (acceptable)
$a = 4$ Donc $n^2 + 1 = 4$ d'où $n^2 = 3$ (imp).
$a = 8$ Donc $n^2 + 1 = 8$ d'où $n^2 = 7$ imp.
Conclusion : a divise b ssi $n = 0$ ou $n = 1$

2) a) Soit $d = PGCD(a ; b)$
d divise a et d divise b Donc d divise $(b - a)$
D'où d divise 8 Alors $d \in \{1 ; 2 ; 4 , 8\}$.
Si n est impair alors $n = 2p + 1$; $(p \in \mathbb{N})$
Donc $a = (2p+1)^2 + 1 = 4p^2 + 4p + 2 = 4(p^2 + p) + 2 = 2(2p^2 + 2p + 1)$

(38)

Alors a n'est pas divisible par 4 et a est divisible par 2

et $b = n^2 + 9 = (2p+1)^2 + 9 = 4p^2 + 4p + 10$

$= 4(p^2 + p + 2) + 2 = 2(2p^2 + 2p + 5)$

Donc b n'est pas divisible par 4 et b est divisible par 2

d'où $PGCD(a;b) = 2$. $(d \in \{1;2;4;8\})$

b) Si n est pair alors $n = 2q$; $q \in \mathbb{N}$

Alors $a = 4q^2 + 1 = 2(2q^2) + 1$

Donc a n'est pas divisible par 2, (ni par 4 ni par 8)

Donc $PGCD(a;b) = 1$

Résulte a et b sont premiers entre eux

<u>Exercice 4</u> : $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$

$x = \frac{1}{2}p + 1$ et $y = 4q + 2$

$xy = 119$

$(\frac{1}{2}p + 1)(4q + 2) = 119$

$(p+2)(2q+1) = 119$.

$(p+2)$ et $(2q+1)$ sont des entiers naturels $(p \in \mathbb{N} ; q \in \mathbb{N})$

Alors ils sont des diviseurs de 119

tels que $p + 2 \geq 3$ et $2q + 1 \geq 3$ $(p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*)$

$119 = 7 \times 17$

Donc $D_{119} = \{1; 7; 17; 119\}$ alors $\begin{cases} p+2 = 7 \\ 2q+1 = 17 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p+2 = 17 \\ 2q+1 = 7 \end{cases}$

Alors $\begin{cases} p = 5 \\ q = 8 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p = 15 \\ q = 3 \end{cases}$

Les couples (p, q) pour lesquels ~~[illegible]~~

sont $(5 ; 8)$ et $(15 ; 3)$

Exercice 5 : $P(x) = x^4 - x^2 + x + 0,5$

Si $x \in [0,1]$ Alors $x \geq x^2$

Donc $-x^2 + x \geq 0$

et $x^4 \geq 0$

Donc $x^4 - x^2 + x \geq 0$

$x^4 - x^2 + x + 0,5 \geq 0,5 > 0$

Alors $P(x) \neq 0$ pour $\forall x \in [0,1]$

Le Polynôme P n'admet pas de racine dans $[0,1]$

Si $x \in [1;+\infty[$ Alors $x^2 \geq x \geq 1$

$x^4 \geq x^2$

Donc $x^4 - x^2 \geq 0$

et $x \geq 1$

Donc $x^4 - x^2 + x \geq 1$

Alors $x^4 - x^2 + x + 0,5 \geq 1,5 > 0$

Donc $P(x) \neq 0$ pour $\forall x \in [1;+\infty[$

Le Polynôme P n'admet pas de racine dans $[1;+\infty[$

Conclusion : P n'admet pas de racine positive.

Exercice 6 : $n \in \mathbb{N}$

1) Si $n = 2k$; $k \in \mathbb{N}$ Alors $n^3 + 5n = (2k)^3 + 5(2k)$

d'où $n^3 + 5n = 2(4k^3 + 5k)$

Puisque $(4k^3 + 5k) \in \mathbb{N}$ Alors $(n^3 + 5n)$ est pair

Si $n = 2k+1$; $k \in \mathbb{N}$ Alors $n^3 + 5n = (2k+1)^3 + 5(2k+1)$

d'où $n^3 + 5n = 2(4k^3 + 6k^2 + 8k + 3)$

Puisque $(4k^3 + 6k^2 + 8k + 3) \in \mathbb{N}$ Alors $(n^3 + 5n)$ est pair

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n^3 + 5n)$ est divisible par 2

2) Si $n = 3k$, $(k \in \mathbb{N})$ Alors $n^3 + 5n = (3k)^3 + 5(3k) = 3(9k^3 + 5k)$

Puisque $(9k^3 + 5k) \in \mathbb{N}$ Alors $(n^3 + 5n)$ est divisible par 3

Si $n = 3k + 1$, $(k \in \mathbb{N})$ Alors $n^3 + 5n = (3k+1)^3 + 5(3k+1)$

Donc $n^3 + 5n = 3(9k^3 + 9k^2 + 8k + 2)$

puisque $(9k^3 + 9k^2 + 8k + 2) \in \mathbb{N}$ alors $(n^3 + 5n)$ est divisible par 3

Si $n = 3k + 2$, $(k \in \mathbb{N})$ Alors $n^3 + 5n = (3k+2)^3 + 5(3k+2)$

Donc $n^3 + 5n = 3(9k^3 + 18k^2 + 17k + 6)$

Puisque $(9k^3 + 18k^2 + 17k + 6) \in \mathbb{N}$ alors $(n^3 + 5n)$ est divisible par 3

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n^3 + 5n)$ est divisible par 3.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$(n^3 + 5n)$ divisible par 2 et par 3

et puisque 2 et 3 sont premiers entre eux alors

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n^3 + 5n)$ est divisible par 6

Exercice 7 :

$a = 14b + c$ tel que $c < 14$

et $a = 12c + b$ tel que $b < 12$

Donc $14b + c = 12c + b$

$13b = 11c$

Donc $11c \in M_{11}$ et $11c \in M_{13}$; $(b \in \mathbb{N})$

Puisque 11 et 13 sont premiers entre eux

Alors $11c$ est un multiple de 143, (11×13)

$11c = 143k$, $(k \in \mathbb{N})$

Donc $c = 13k$ et comme $c < 14$ et $c \in \mathbb{N}$

Alors $c = 0$ ou $c = 13$.

Si $c = 0$ Alors $b = 0$, $(13b = 11c)$, Donc $a = 0$

Si $c = 13$ Alors $b = 11$ Donc $a = 167$

Conclusion : $(a ; b ; c) \in \{(167 ; 11 ; 13)\}$

Bel Modo di Vivere

Exercice 8 :

Soit a le dividende de cette division euclidienne et b le diviseur de cette division

Donc $b \in \mathbb{N}^*$ et $a < 5000$, $(a \in \mathbb{N})$

Alors $a = 93b + 51$ Alors $b > 51$.

$a < 5000$

$93b + 51 < 5000$

$93b < 4949$

$b < \frac{4949}{93}$ et comme $b \in \mathbb{N}$ Alors $b \leq 53$, $\left(\frac{4949}{93} \approx 53,2\right)$

Ainsi $b > 51$; $b \leq 53$ et $b \in \mathbb{N}$

Alors $b = 52$ ou $b = 53$

Si $b = 52$ Alors $a = 4887$; $(a = 93b + 51)$

Si $b = 53$ Alors $a = 4980$

Conclusion : $(a ; b) \in \{(4887 ; 52), (4980 ; 53)\}$.