LYCEE PILOTE	**DEVOIR DE CONTRÔLE N° 1**	PROF : MR HADJ KACEM DURÉE : 1 H CLASSE : $2^{\text{ème}}$ SC 3

3

EXERCICE N° 1 :

Répondre par « Vrai » ou « Faux ».

1/ $\sqrt{\dfrac{3}{\pi}} < \dfrac{3}{\pi} < \dfrac{9}{\pi^2}$

2/ x et y étant deux réels si $x \in [-2\,;-1]$ et $y \in [1\,;2]$ alors $xy \in [-4\,;-1]$

3/ pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: si $\vec{u} \perp \vec{v}$ alors $(\vec{u}\,;\vec{v})$ est une base.

4/ pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\|\vec{u}-\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

EXERCICE N° 2 :

I/ Soient a et b deux réels, m et n deux réels strictement positifs

Montrer que si a < b alors $a < \dfrac{ma+nb}{m+n} < b$

II/ Soient a, b et c trois réels tel que abc = 1

Montrer que : $\dfrac{a}{ab+a+1} + \dfrac{b}{bc+b+1} + \dfrac{c}{ac+c+1} = 1$

III/ Le prix d'un article est de 180 D.T ce prix subit une majoration d'un taux de 25 % puis une minoration à un taux inconnu de t % sur le prix majoré.

Calculer t sachant que le prix de l'article est à nouveau 180 D.T.

EXERCICE N° 3 :

I/ Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux et unitaires

1) calculer $\|\vec{u}+\vec{v}\|$; $\|\vec{u}-2\vec{v}\|$

2) déterminer le réel t pour que les vecteurs $(2\vec{u}+\vec{v})$ et $(\vec{u}+t\vec{v})$ soient orthogonaux

II/ Soit ABCD un rectangle tels que AD = 1 et AB = $\sqrt{2}$

On désigne par E le milieu de [AB] et par I le point de [AB] tel que AI = 1

Montrer que (AC) et (DE) sont perpendiculaires.

2 SC3

Devoir de Contrôle N°1

Exercice 1 : (Vrai ou faux)

1) Faux, $\left(\frac{3}{\pi} \in]0;1[\text{ Donc } \sqrt{\frac{3}{\pi}} > \frac{3}{\pi} > \left(\frac{3}{\pi}\right)^2 \right)$

2) Vrai, $\left(1 \le -x \le 2 \text{ et } 1 \le y \le 2 \text{ Donc } 1 \le -xy \le 4 \right.$
$-4 \le xy \le -1$ D'où $xy \in [-4;-1]$.

3) Faux
si $\vec{u} = \vec{0}$ Alors $\vec{u} \perp \vec{v}$, Pour tout vecteur $\vec{v}$
et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires Donc $(\vec{u};\vec{v})$ n' [illegible]

4) Vrai $\left(\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) \right)$

Comme $\|\vec{u} + (-\vec{v})\| \le \|\vec{u}\| + \|-\vec{v}\|$

et $\|-\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$ Donc $\|\vec{u} - \vec{v}\| \le \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

Exercice 2 :

1) a) $\frac{ma+nb}{m+n} - a = \frac{n(b-a)}{m+n} > 0$ car $b > a$, $n \in \mathbb{R}_+^*$, $m \in \mathbb{R}_+^*$

Donc $a < \frac{ma+nb}{m+n}$

b) $b - \frac{ma+nb}{m+n} = \frac{m(b-a)}{m+n} > 0$

Donc $\frac{ma+nb}{m+n} < b$

c) $a < \frac{ma+nb}{m+n} < b$

Deuxième méthode : a) $a < b$ Donc $ma < mb$ $(m > 0)$
$ma + nb < mb + nb$

D'où $ma + nb < b(m+n)$

Alors $\frac{ma+nb}{m+n} < b$ car $m+n > 0$

i) $a < b$ donc $ma < mb$

$$ma + na < ma + nb$$

$$(m+n)\,a < ma + nb$$

donc $a < \dfrac{ma+nb}{m+n}$; $(m+n>0)$

cl $a < \dfrac{ma+nb}{m+n} < b$

II/ $\dfrac{a}{ab+a+1} + \dfrac{b}{bc+b+1} + \dfrac{c}{ac+c+1}$

$$= \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b \times a}{(bc+b+1)\times a} + \frac{c \times ab}{(ac+c+1)\times ab}$$

$$= \frac{a}{ab+a+1} + \frac{ab}{1+ab+a} + \frac{1}{a+1+ab} \quad ; (abc=1)$$

$$= \frac{a+ab+1}{ab+a+1}$$

donc $\dfrac{a}{ab+a+1} + \dfrac{b}{bc+b+1} + \dfrac{c}{ac+c+1} = 1$

III/ $\left(1+\dfrac{25}{100}\right)\left(1-\dfrac{t}{100}\right) = 1$

$$\frac{125}{100}\left(1-\frac{t}{100}\right) = 1$$

$$1 - \frac{t}{100} = \frac{100}{125}$$

$$\frac{t}{100} = 1 - \frac{100}{125}$$

$$t = \%\left(\frac{25}{125}\right)$$

$$t = 20$$

donc la minoration est d'un taux de 20%

Exercice 3 :

1/ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et unitaires

Donc $(\vec{u} ; \vec{v})$ est une base orthonormée

29 520 377

Soit $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$

Donc $\vec{x}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u} ; \vec{v})$

Ensuite $\|\vec{x}\| = \sqrt{1^2 + 1^2}$

Donc $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{2}$

Soit $\vec{y} = \vec{u} - 2\vec{v}$

Donc $\vec{y}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u} ; \vec{v})$

Ensuite $\|\vec{y}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2}$

Donc $\|\vec{u} - 2\vec{v}\| = \sqrt{5}$

2) $(2\vec{u} + \vec{v})\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u} ; \vec{v})$

et $(\vec{u} + t\vec{v})\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u} ; \vec{v})$

Puisque $(\vec{u} ; \vec{v})$ base orthonormée

Donc $(2\vec{u} + \vec{v}) \perp (\vec{u} + t\vec{v})$

équivaut : $2 \times 1 + 1 \times t = 0$

$\boxed{t = -2}$

II/ ABCD est un rectangle et $I \in [AB]$

Donc $\overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{AD}$

Comme $\|\overrightarrow{AI}\| = \|\overrightarrow{AD}\| = 1$

Alors $R = (A; \overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AD})$ est un repère orthonormé du plan d'où la base $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD})$ est orthonormée

$I \in [AB]$ donc $\overrightarrow{AB} = \sqrt{2}\,\overrightarrow{AI}$; ($AI = 1$ et $AB = \sqrt{2}$)

29 520 377

ABCD est un rectangle donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$= \sqrt{2}\,\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AD}$

D'où $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{AI};\, \overrightarrow{AD})}$

D'autre part $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$

$= -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; E milieu de [AB]

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AD}$

Donc $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -1 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{AI},\, \overrightarrow{AD})}$

Puisque $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD})$ est une base orthonormée

et $aa' + bb' = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \times (-1)$

$= 1 - 1 = 0$

Donc $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{DE}$; ($\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$ orthogonaux)

d'où (AC) et (DE) sont perpendiculaires

droites perpendiculaires