

LYCEE PILOTE

DEVOIR

PROF : MR HADJ KACEM

DURÉE : 1 h

CLASSE : 2^{ème} SC 3

DE CONTRÔLE N° 1

SSSS

EXERCICE N° 1 :

Répondre par « Vrai » ou « Faux ».

1/ $\sqrt{\frac{3}{\pi}} < \frac{3}{\pi} < \frac{9}{\pi^2}$

2/ x et y étant deux réels si $x \in [-2 ; -1]$ et $y \in [1 ; 2]$ alors $xy \in [-4 ; -1]$

3/ pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: si $\vec{u} \perp \vec{v}$ alors $(\vec{u} ; \vec{v})$ est une base :

4/ pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\|\vec{u} - \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

EXERCICE N° 2 :

I/ Soient a et b deux réels; m et n deux réels strictement positifs

Montrer que si $a < b$ alors $a < \frac{ma + nb}{m + n} < b$

II/ Soient a, b et c trois réels tel que $abc = 1$

Montrer que : $\frac{a}{ab + a + 1} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{c}{ac + c + 1} = 1$

III/ Le prix d'un article est de 180 D.T ce prix subit une majoration d'un taux de 25 % puis une minoration à un taux inconnu de t % sur le prix majoré.

Calculer t sachant que le prix de l'article est à nouveau 180 D.T.

EXERCICE N° 3 :

I/ Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux et unitaires

1) calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|$; $\|\vec{u} - 2\vec{v}\|$

2) déterminer le réel t pour que les vecteurs $(2\vec{u} + \vec{v})$ et $(\vec{u} + t\vec{v})$ soient orthogonaux

II/ Soit ABCD un rectangle tels que $AD = 1$ et $AB = \sqrt{2}$

On désigne par E le milieu de [AB] et par I le point de [AB] tel que $AI = 1$

Montrer que (AC) et (DE) sont perpendiculaires.

Devoir de Contrôle N°1

Exercice 1: (Vrai ou faux)

1) Faux: $\left(\frac{3}{\pi} \in]0;1[\text{ donc } \sqrt{\frac{3}{\pi}} > \frac{3}{\pi} > \left(\frac{3}{\pi}\right)^2 \right)$

2) Vrai: $\left(\begin{array}{l} 1 \leq x \leq 2 \text{ et } 4 \leq y \leq 1 \text{ donc } 1 \leq xy \leq 1 \\ -4 \leq xy \leq -1 \text{ donc } xy \in [-4; -1] \end{array} \right)$

3) Faux
si $\vec{u} = \vec{v}$ Alors $\vec{u} \perp \vec{v}$, Pour tout vecteur $\vec{v}$
et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ linéaires donc $(\vec{u}; \vec{v})$ n'est pas une base
d'ailleurs $(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0} = -\vec{u} + (-\vec{v})$

Comme $\|\vec{u} - (-\vec{v})\| \leq \|\vec{u}\| + \|-\vec{v}\|$

et $\|-\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$ donc $\|\vec{u} - \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

Exercice 2/1:

1) $\frac{ma + nb}{m+n} = a \iff \frac{m(b-a)}{m+n} > 0 \text{ car } b > a, m \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{R}^+$

Donc $a < \frac{ma + nb}{m+n}$

2) $b = \frac{ma + mb}{m+n}$

Donc $\frac{ma + nb}{m+n} < b$

$a < \frac{ma + nb}{m+n} < b$

Deuxième méthode: si $a < b$ donc $ma < mb$ ($m > 0$)
 $ma + nb < mb + nb$

d'où $ma + nb < b(m+n)$

Alors $\frac{ma + nb}{m+n} < b$ car $m+n > 0$

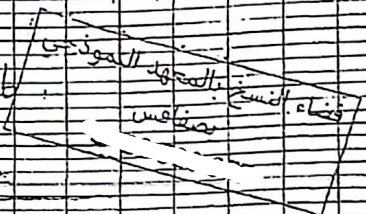
$$a) \quad a < b \quad \text{donc} \quad ma < mb$$

$$ma + na < ma + mb$$

$$(m+n)a < ma + mb$$

$$\text{donc} \quad a < \frac{ma + mb}{m+n} \quad (m+n > 0)$$

$$\leq \quad a < \frac{ma + mb}{m+n}$$



$$\text{II} / \quad \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ac+c+1}$$

$$\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{(bc+b+1) \times a} + \frac{c}{(ac+c+1) \times ab}$$

$$\frac{a}{ab+a+1} + \frac{ab}{1+ab+a} + \frac{1}{a+1+ab} \quad (abc=1)$$

نقطة: نسخ بالعدد الصحيح
اختصاص

$$a + ab = 1$$

$$ab + a = 1$$

$$\text{donc} \quad \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ac+c+1} = 1$$

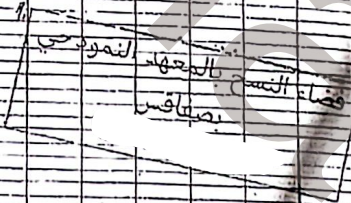
$$\text{III} / \quad \left(1 - \frac{20}{100}\right) \left(1 - \frac{t}{100}\right) = 1$$

$$\frac{120}{100} \left(1 - \frac{t}{100}\right) = 1$$

$$1 - \frac{t}{100} = \frac{100}{120}$$

$$\frac{t}{100} = 1 - \frac{100}{120}$$

$$t = 20$$



donc la minoration est donc 20%

Exercice 3:

1/ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et unitaires
 Donc $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée

2) On a $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$
 Donc $\vec{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$

Norme $\|\vec{x}\| = \sqrt{1^2 + 1^2}$

Donc $\|\vec{x}\| = \sqrt{2}$

On a $\vec{y} = \vec{u} - 2\vec{v}$
 Donc $\vec{y} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$

Norme $\|\vec{y}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2}$

Donc $\|\vec{y}\| = \sqrt{5}$

3) $(2\vec{u} + \vec{v}) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$

et $(\vec{u} + 6\vec{v}) \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$

Puisque $(\vec{u}, \vec{v})$ base orthonormée

Donc $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + 6\vec{v})$

éq: $2 \times 1 + 1 \times 6 = 8$

$\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 2 \times 6 = -11$

II/ ABCD est un rectangle et E ∈ [AB]

On a $\vec{AE} \perp \vec{AD}$

Comme $\|\vec{AE}\| = \|\vec{AD}\| = 1$

Alors $\mathcal{B} = (\vec{AE}, \vec{AD})$ est une base orthonormée du plan

base $(\vec{AE}, \vec{AD})$ est orthonormée

Et $\vec{AB} = \sqrt{2} \vec{AE}$ ($\vec{AE} = 1$ et $\vec{AB} = \sqrt{2}$)

ABCD est un rectangle donc $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$
 $= \sqrt{2} \vec{AE} + \vec{AD}$

Donc $\vec{AC} \left(\begin{array}{c} \sqrt{2} \\ 1 \end{array} \right)$
 $\mathcal{B} = (\vec{AE}, \vec{AD})$

Donc point $\vec{DE} = \vec{DA} + \vec{AE}$
 $= -\vec{AD} + \frac{1}{2} \vec{AB}$ (milieu de [AB])
 $= -\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{AE} + \vec{AD}$

Donc $\vec{DE} \left(\begin{array}{c} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{array} \right)$
 $\mathcal{B} = (\vec{AE}, \vec{AD})$

base $(\vec{AE}, \vec{AD})$ est une base orthonormée

et $\vec{AB} = \sqrt{2} \vec{AE}$ ($\vec{AE} = 1$ et $\vec{AB} = \sqrt{2}$)

$= 1 = \sqrt{2}$

Donc $\vec{AC} \perp \vec{DE}$; ($\vec{AC} \perp \vec{DE}$ orthogonaux)

donc (AC) et (DE) sont sécantes

donc les droites (AC) et (DE) sont sécantes