LYCEE PILOTE-SFAX-	DEVOIR DE CONTROLE N°1 DE MATHEMATIQUES	Mme MEGDICH
2SC 9-10. 1H		

18

EXERCICE N°1(4 points)

Soient A, B et C trois points du plan tels que $AC = 8$, $AB = \sqrt{81-8\sqrt{5}}$ et $BC = \dfrac{\sqrt{5}}{20+9\sqrt{5}}$

1/ Montrer que $BC = 9-4\sqrt{5}$

2/ Montrer que $B \in [AC]$

EXERCICE N°2(4 points)

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 4cm , AC = 3cm et BC = 5cm. M est un point de $[AB]$ tel que AM = x . Par M on trace la parallèle à (BC) qui coupe $[AC]$ en N

1/ Exprimer en fonction de x les distances AN et MN

2/ Déterminer les valeurs de x pour lesquelles le périmètre P1 du triangle AMN soit supérieur strictement au périmètre P2 du trapèze MNCB

EXERCICE N°3(3 points)

1/ Montrer que pour tout entier naturel n ≥ 1 on a : $n^2+\dfrac{1}{n} \geq 2\sqrt{n}$

2/ Déduire que : $n^2-n+1 \geq \dfrac{2n\sqrt{n}}{1+n}$

EXERCICE N°4(9 points)

ABCD est un rectangle tels que AB = 4cm et AD = 3cm

1/ Construire les points E et F définis par : $\overline{AE} = \dfrac{1}{4}\overline{AB}$ et $\overline{DF} = \dfrac{4}{3}\overline{DA}$

2/ Montrer que les points E , F et C sont alignés

3/ a) Montrer que R= $\left(A, \overline{AE}, \overline{AF}\right)$ est un repère orthonormé

b) Soient K(3,0) et G tel que $\overline{DG} = \dfrac{2}{3}\overline{DK}$. Déterminer les coordonnées des points C , D et G dans R

c) Montrer que KGC est un triangle rectangle en G

d) Calculer le rayon du cercle circonscrit au quadrilatère BCGK

2sc 9-10 Devoir de Contrôle N°1 Mme Megdiche

Exercice 1 : (4 pts)

1) $BC = \dfrac{\sqrt5}{20+9\sqrt5} = \dfrac{\sqrt5(20-9\sqrt5)}{(20+9\sqrt5)(20-9\sqrt5)}$

$= \dfrac{20\sqrt5-45}{-5} = 9-4\sqrt5$

Donc $BC = 9-4\sqrt5$

2) $AB = \sqrt{81-8\sqrt5} = \sqrt{(4\sqrt5)^2+1^2-2\times4\sqrt5\times1}$

$= \sqrt{(4\sqrt5-1)^2} = |4\sqrt5-1| = 4\sqrt5-1$

Donc $AB = 4\sqrt5-1$

Ainsi $\left.\begin{array}{l} AC = 8 \\ AB = 4\sqrt5-1 \\ BC = 9-4\sqrt5 \end{array}\right\}$ Donc $AC = AB + BC$

par suite $B \in [AC]$.

Exercice 2 : (4 pts)

Dans cet exercice, M est distinct de A et B puisque on parle du triangle AMN et du trapèze MNCB aussi bien $AM = x$ cm

1) Dans le triangle ABC

$\left.\begin{array}{l} M \in (AB),\ N \in (AC) \\ (MN) \parallel (BC) \end{array}\right\}$ D'après Thalès $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$

Donc $AN = \dfrac{3x}{4}$ et $MN = \dfrac{5x}{4}$

$P_1 = AM + AN + MN$

$= x + \dfrac{3x}{4} + \dfrac{5x}{4}$ D'où $P_1 = 3x$

$P_2 = MN + NC + CB + BM$

$= \dfrac{5x}{4} + \left(3 - \dfrac{3x}{4}\right) + 5 + (4-x)$; $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$

D'où $P_2 = 12 - \frac{1}{2}x$

$P_1 > P_2$

équivaut : $3x > 12 - \frac{1}{2}x$

équivaut $\frac{7}{2}x > 12$

équivaut $x > \frac{24}{7}$

et puisque $x \in]0;4[$ Alors $x \in]\frac{24}{7};4[$.

Exercice 3 : (3pts)

1) $n \in \mathbb{N}^*$ donc $\frac{1}{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$

et puisque $\left(n - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \geq 0$

Alors $n^2 + \frac{1}{n} - 2n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0$

Par suite $n^2 + \frac{1}{n} \geq 2\sqrt{n}$

$n^2 + \frac{1}{n} \geq 2\sqrt{n}$

2) $n\left(n^2 + \frac{1}{n}\right) \geq 2n\sqrt{n}$ $(n > 0)$

$n^3 + 1^3 \geq 2n\sqrt{n}$

$(n+1)(n^2 - n + 1) \geq 2n\sqrt{n}$

$n^2 - n + 1 \geq \frac{2n\sqrt{n}}{n+1}$ $(n+1 > 0)$

Exercice 4 : (9 pts)

1) $\vec{AE} = \frac{1}{4}\vec{AB}$ donc $x_E = \frac{1}{4}$ dans le repère $(A, \vec{AB})$

$\vec{DF} = \frac{4}{3}\vec{DA}$ donc $x_F = \frac{4}{3}$ dans le repère $(D, \vec{DA})$

2) $\vec{FE}$ ...

3) a) $ABCD$ est un rectangle donc $(AB) \perp (AD)$
puisque $E \in (AB)$ et $F \in (AD)$ alors $(AE) \perp (AF)$
donc $\vec{AE} \perp \vec{AF}$

d'autre part $\|\vec{AE}\| = \|\frac{1}{4}\vec{AB}\| = \frac{1}{4}AB = 1$

et $\|\vec{AF}\| = \|\vec{AD} + \vec{DF}\| = \|\vec{AD} - \frac{4}{3}\vec{AD}\|$
$= \|-\frac{1}{3}\vec{AD}\| = \frac{1}{3}AD = 1$

Donc $\vec{AE}$ et $\vec{AF}$ sont deux vecteurs unitaires et orthogonaux
par suite $R = (A, \vec{AE}, \vec{AF})$ est un repère orthonormé

b) a) $ABCD$ est un rectangle

Donc $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$

$\vec{AC} = 4\vec{AE} - 3\vec{AF}$ $\left(\vec{AF} = -\frac{1}{3}\vec{AD}\ \text{d'après}\ 3\right)$

D'où $C(4\,;\,-3)$

c) $\vec{AD} = -3\vec{AF} = 0\vec{AE} - 3\vec{AF}$

Donc $D(0\,;\,-3)$

c) $\vec{DG} = \frac{2}{3}\vec{DK}$

$x_G - x_D = \frac{2}{3}(x_K - x_D)$ et $y_G - y_D = \frac{2}{3}(y_K - y_D)$

$x_G - 0 = \frac{2}{3}(3 - 0)$ et $y_G + 3 = \frac{2}{3}(0 + 3)$

Bel Modo di Vivere

D'où $G(2;-1)$

c) On a $G(2;-1)$, $K(3;0)$ et $C(4;-3)$

Donc $\vec{GK}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_{(\vec{AE};\vec{AF})}$ et $\vec{GC}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}_{(\vec{AE};\vec{AF})}$

D'où $aa' + bb' = 1\times2 + 1\times(-2) = 0$

et $(\vec{AE},\vec{AF})$ est une base orthonormée

Alors $\vec{GK} \perp \vec{GC}$

Résulte le triangle KGC est rectangle en G

d) $\vec{AE} = \frac{1}{4}\vec{AB}$ donc $\vec{AB} = 4\vec{AE}$ d'où $B(4;0)$

Comme $C(4;-3)$ et $K(3;0)$

Donc $\vec{CB}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{BK}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

$aa' + bb' = 0\times(-1) + 3\times0 = 0$

Donc $\vec{CB} \perp \vec{BK}$

D'où CBK est un triangle rectangle en B

et puisque KGC est aussi un triangle rectangle en G

Donc le quadrilatère $BCGK$ est inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de diamètre l'hypoténuse commun $[CK]$ des triangles rectangles CBK et KGC

D'où le rayon r de $\mathscr{C}$ est $r = \frac{CK}{2}$

On a $\vec{CK}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ donc $CK = \sqrt{10}$

et $r = \frac{\sqrt{10}}{2}$