

EXERCICE N°1 (4 points)

Soient A, B et C trois points du plan tels que $AC = 8$, $AB = \sqrt{81 - 8\sqrt{5}}$ et $BC = \frac{\sqrt{5}}{20 + 9\sqrt{5}}$

1/ Montrer que $BC = 9 - 4\sqrt{5}$

2/ Montrer que $B \in [AC]$

EXERCICE N°2 (4 points)

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 4\text{cm}$, $AC = 3\text{cm}$ et $BC = 5\text{cm}$. M est un point de $[AB]$ tel que $AM = x$. Par M on trace la parallèle à (BC) qui coupe $[AC]$ en N

1/ Exprimer en fonction de x les distances AN et MN

2/ Déterminer les valeurs de x pour lesquelles le périmètre P1 du triangle AMN soit supérieur strictement au périmètre P2 du trapèze MNCB

EXERCICE N°3 (3 points)

1/ Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a : $n^2 + \frac{1}{n} \geq 2\sqrt{n}$

2/ Dédire que : $n^2 - n + 1 \geq \frac{2n\sqrt{n}}{1+n}$

EXERCICE N°4 (9 points)

ABCD est un rectangle tels que $AB = 4\text{cm}$ et $AD = 3\text{cm}$

1/ Construire les points E et F définis par : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{DA}$

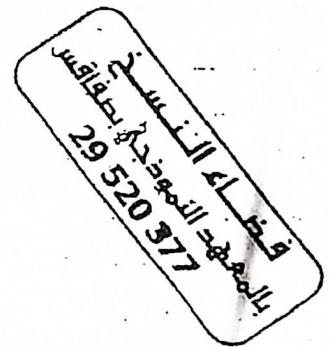
2/ Montrer que les points E, F et C sont alignés

3/a) Montrer que $R = (A, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF})$ est un repère orthonormé

b) Soient K(3,0) et G tel que $\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DK}$. Déterminer les coordonnées des points C, D et G dans R

c) Montrer que KGC est un triangle rectangle en G

d) Calculer le rayon du cercle circonscrit au quadrilatère BCGK



Exercice 1: (4pts)

$$1) \quad BC = \frac{\sqrt{5}}{20-9\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}(20-9\sqrt{5})}{(20-9\sqrt{5})(20-9\sqrt{5})} = \frac{20\sqrt{5}-45}{9-4\sqrt{5}}$$

Donc $BC = \frac{9-4\sqrt{5}}{9-4\sqrt{5}}$

$$2) \quad AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 + 1^2} = \sqrt{80+1} = \sqrt{81} = 9$$

Donc $AB = 9$

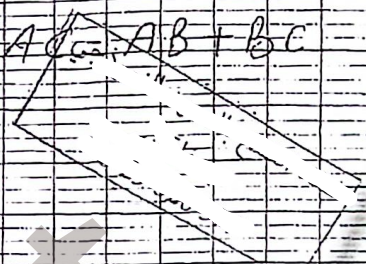
Alors $AC = 8$

$AB = 9$

$BC = 9-4\sqrt{5}$

par suite $BC \in AC$

Donc $AC = AB + BC$



Exercice 2: (4pts)

Dans cet exercice, M est distinct de A et B
puisque on parle du triangle AMN et
du trapèze ANCB

soit donc $AM = x$ cm

1) Dans le triangle ABC

$ME \parallel AB$ et $NE \parallel AC$

$(MN) \parallel (BC)$

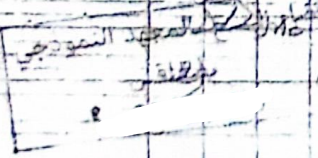
$AN = 3x$ et $MN = 5x$

$P_1 = AM + MN + NC$

$= x + 5x + 3x = 9x$

$P_2 = MN + NC + CB + BM$

$= 5x + 3x + 4 + (4-x) = 12x + 4 - x = 11x + 4$



$$2m - p_2 = 12 - \frac{1}{2}x$$

$$p_1 > p_2$$

$$\text{donc: } 3x > 12 - \frac{1}{2}x$$

$$\text{c'est-à-dire: } \frac{9}{2}x > 12$$

$$\text{c'est-à-dire: } x > \frac{24}{7}$$

$$\text{et puisque } x \in]0, 4[\text{ Alors } x \in]\frac{24}{7}, 4[$$

Exercice 3: (3pts)

$$1) m \in \mathbb{N}^* \text{ donc } \frac{1}{m} = \left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)^2$$

$$\text{et puisque } \left(m = \frac{1}{\sqrt{m}}\right)^2 \geq 0$$

$$\text{Alors } m^2 + \frac{1}{n} = 2m \cdot \frac{1}{\sqrt{m}} \geq 0$$

$$\text{Pensez à } m^2 + \frac{1}{n} \geq 2\sqrt{m}$$

$$2) m^2 + \frac{1}{n} \geq 2\sqrt{m}$$

$$m \left(m^2 + \frac{1}{m} \right) \geq 2n \cdot \sqrt{m} \quad (m > 0)$$

$$m^3 + 1 \geq 2n\sqrt{m}$$

$$(m+1) \left(m^2 - n + 1 \right) \geq 2n\sqrt{m}$$

$$\frac{m^2 - n + 1}{m+1} \geq \frac{2n\sqrt{m}}{m+1} \quad (m+1 > 0)$$

Exercice 42 (9 pt)

1) $\vec{AE} = \frac{1}{4} \vec{AB}$ Dm. $\gamma = \frac{1}{4}$ dans le repère $(A; \vec{AB})$

$\vec{DF} = \frac{4}{3} \vec{DP}$ Dm. $\gamma = \frac{4}{3}$ dans le repère $(D; \vec{DA})$

2) $\vec{EF}$

3) a) ABCD est un rectangle Dm. $(AB) \perp (AD)$
 prap. $E \in (AB)$ et $F \in (AD)$ Alors $(AE) \perp (AF)$
 et on a $\vec{AE} \perp \vec{AF}$

2 autres part $\|\vec{AE}\| = \|\frac{1}{4} \vec{AB}\| = \frac{1}{4} \|\vec{AB}\|$

et $\|\vec{AF}\| = \|\vec{AD} + \vec{DF}\| = \|\vec{AD} + \frac{4}{3} \vec{AD}\|$
 $= \|\frac{7}{3} \vec{AD}\| = \frac{7}{3} \|\vec{AD}\|$

Dm. $\vec{AE}$ et $\vec{AF}$ ont deux vecteurs unitaires
 et orthogonaux
 par suite $R = (A; \vec{AE}, \vec{AF})$ est un repère orthonormal

b) ABCD est un rectangle

Dm. $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$
 $\vec{AC} = 4\vec{AE} + 3\vec{AF}$ ($\vec{AF} = \frac{3}{4} \vec{AD}$ d'après 1)

et on a $C(4; 3)$

$\vec{AD} = 3\vec{AF} = 0\vec{AE} + 3\vec{AF}$

Dm. $D(0; 3)$

$\vec{DC} = \frac{2}{3} \vec{DK}$

$\vec{AD} = \frac{2}{3} (\vec{K} - \vec{D})$ et $\vec{AD} = \frac{2}{3} (\vec{K} - \vec{D})$

$\vec{AG} = \frac{2}{3} (3 - a)$ et $\vec{AG} + \vec{B} = \frac{2}{3} (0 + 3)$

Dans $G(2, -1)$

on a $G(2, -1)$, $K(3, 0)$ et $C(4, -3)$

Dans $GK \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $GC \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$
 $(\vec{AE}, \vec{AF})$

$\vec{AB} \cdot \vec{B'K} = 1 \times 2 + 1 \times (-2) = 0$

$(\vec{AE}, \vec{AF})$ est une base orthogonale

Alors $GK \perp GC$
 Permette le triangle KGC rectangle en G

$\vec{AE} = \frac{1}{4} \vec{AB}$ donc $\vec{AB} = 4\vec{AE}$ donc $B(4, 0)$
 Comme $C(4, -3)$ et $K(3, 0)$

donc $\vec{CB} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{BK} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{CB} \cdot \vec{BK} = 0 \times (-1) + 3 \times 0 = 0$

Donc $\vec{CB} \perp \vec{BK}$
 Dm CBK est un triangle rectangle en B
 et puisque KGC est aussi un triangle rectangle en G

Donc le quadrilatère $BCKG$ est inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre l'hypoténuse commune $[CK]$

Le triangle rectangle CBK et KGC ont le rayon OK est $\frac{CK}{2}$

On a $CK \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc $CK = \sqrt{10}$

et $r = \frac{\sqrt{10}}{2}$

Donc le cercle $\mathcal{C}$ a pour centre $O(2.5, -1.5)$ et rayon $r = \frac{\sqrt{10}}{2}$