Prof : MEFTAH MONGI 58 059 297 Durée : 60 mn	Devoir de contrôle de Mathématiques n° 1	Lycée : P. SOUSSE 58 059 297 Classe : 2 SC 6
Nom et prénom :....................................	N° :.........	A.S : 2023 - 2024

EXERCICE N°1 (5.5 points)

A/ x et y étant deux réels positifs tel que $x \geq y$

1)a) Montrer que $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}$

b)En déduire que pour tout entier naturel n non nul $\sqrt{(n+1)^3} - \sqrt{(n-1)^3} \leq \sqrt{6n^2+2}$

2) On pose $S = \sqrt{3 \times 1^2 + 1} + \sqrt{3 \times 3^2 + 1} + \cdots \ldots \ldots \ldots \sqrt{3 \times 2017^2 + 1} + \sqrt{3 \times 2019^2 + 1}$

Montrer que $S \geq 2020\sqrt{2010}$

B/ a, b, c et d étant quatre réels distincts.

a- Montrer que : $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$.

b- Ecrire le nombre : 61×113 sous la forme de somme de deux carrés.

EXERCICE N°2 (5 points)

1) Résoudre dans IR : $\sqrt{5-|x|} < 2$

2)Résoudre dans IR $\quad *)\ |x+2| = -x^2 + 1 - \sqrt{2}$

$$**)\ \frac{x-3}{2x+5} \geq 2$$

3)a)Montrer que pour tout réel x , on a : $\sqrt{x^2+1} \succ x$

b)Résoudre dans IR l'inéquation : $\dfrac{2x+3}{x-\sqrt{x^2+1}} \prec x + \sqrt{x^2+1}$

EXERCICE N°3(2 .5 points)

1) Résoudre dans IR : $x^2 - 6x + 5 = 0$

2) B= $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base dans l'ensemble des vecteurs et m un nombre réel

Déterminer les réels m pour que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} m^2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ m^2-6 \end{pmatrix}$ *soient* colinéaires

EXERCICE N°4(7 points)

Dans un repère orthonormé R=(o, $\vec{i}$, $\vec{j}$) , on donne dans la figure ci-contre un triangle OAB rectangle en B avec OB = 4 et ayant une aire égale à 6

1)a) Justifier que le point A a pour coordonnées (5,0)

b)Déterminer les coordonnées du point B

2)Soit I = A*O

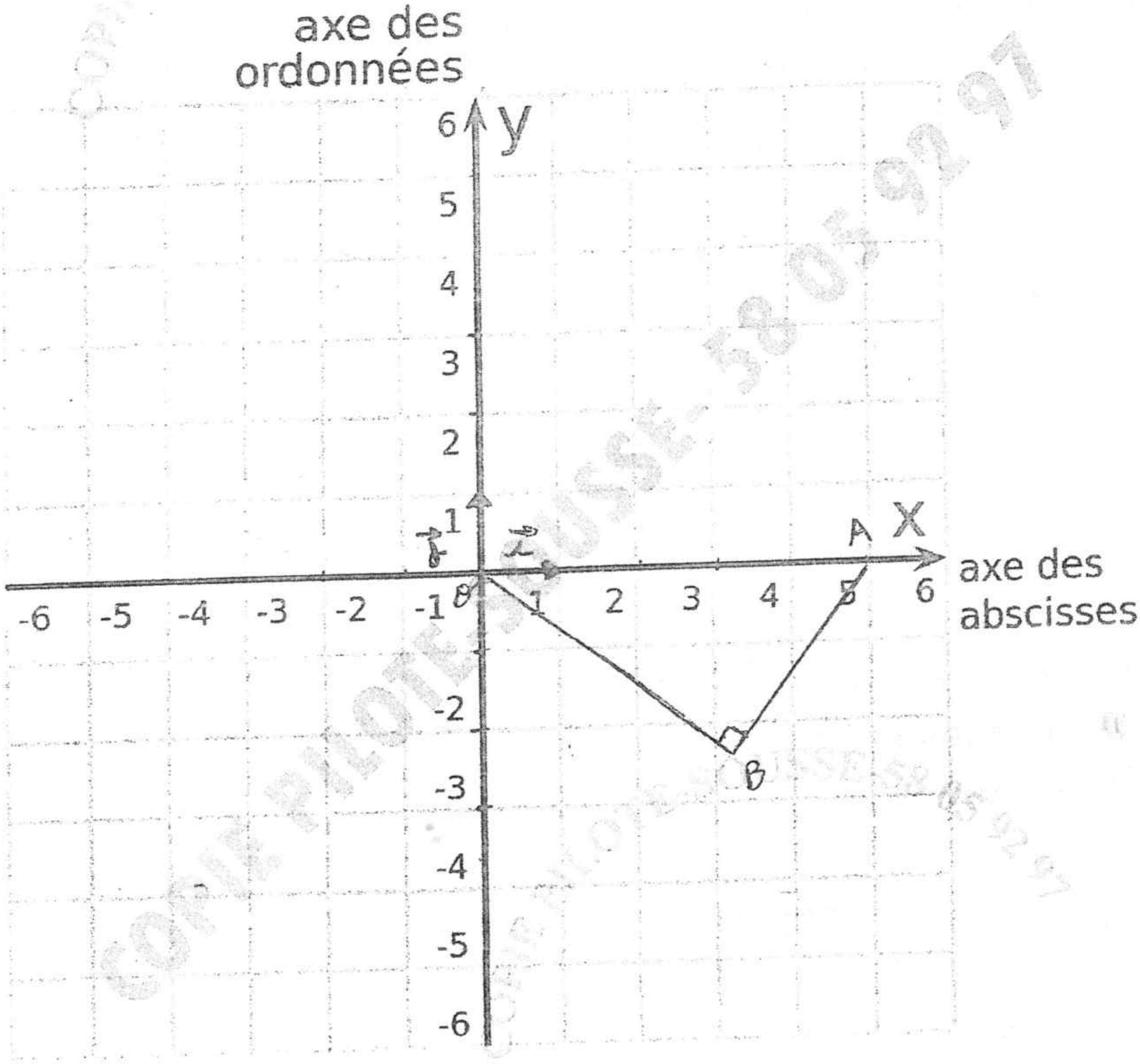
58 059 297

Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MO}\| = \|2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\|$

3)Soit C$(2,\frac{-5}{4})$ dans le repère R'=(O, $\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}$)

a)Montrer que (AC)//(OB)

b)Déduire l'aire du triangle OBC



<u>IL NE S'AGIT PAS DE TOUT FAIRE , IL S'AGIT DE BIEN FAIRE CE QUE L'ON PEUT FAIRE</u>

1 :

1) a) Soit $A = \sqrt{x} - \sqrt{y}$ et $B = \sqrt{x-y}$ avec $x \geq y$

On a $A^2 - B^2 = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 - \sqrt{x-y}^2$

$= x - 2\sqrt{xy} + y - (x-y)$

$= x - 2\sqrt{xy} + y - x + y$

$= 2y - 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{y}(\sqrt{y} - \sqrt{x})$

Or on $y \leq x \iff \sqrt{y} \leq \sqrt{x}$ donc $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leq 0$

et $2\sqrt{y} \geq 0$

donc $2\sqrt{y}(\sqrt{y} - \sqrt{x}) \leq 0$ ~~d~~ d'où $A^2 - B^2 \leq 0$

$\Rightarrow A^2 \leq B^2$ et A et B sont positifs

donc $A \leq B$ d'où $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}$

b) On pose $X = (n+1)^3$ et $Y = (n-1)^3$.

On a $n+1 \geq n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$) donc $(n+1)^3 \geq (n-1)^3$

donc $X \geq Y$ et d'après [1) a)] on a $\sqrt{X} - \sqrt{Y} \leq \sqrt{X-Y}$

d'où $\sqrt{(n+1)^3} - \sqrt{(n-1)^3} \leq \sqrt{(n+1)^3 - (n-1)^3}$

donc $\sqrt{(n+1)^3} - \sqrt{(n-1)^3} \leq \sqrt{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 + 3n^2 - 3n + 1}$

$\iff \sqrt{(n+1)^3} - \sqrt{(n-1)^3} \leq \sqrt{6n^2 + 2}$

2) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sqrt{6n^2+2} \geq \sqrt{(n+1)^3} - \sqrt{(n-1)^3}$

$\Rightarrow \sqrt{2}\sqrt{3n^2+1} \geq \sqrt{(n+1)^3} - \sqrt{(n-1)^3}$

$\Rightarrow \sqrt{3n^2+1} \geq \dfrac{\sqrt{(n+1)^3} - \sqrt{(n-1)^3}}{\sqrt{2}}$

* pour $n = 1$ on a :

$\sqrt{3 \times 1^2 + 1} \geq \dfrac{\sqrt{(1+1)^3} - \sqrt{(1-1)^3}}{\sqrt{2}}$

$\iff \sqrt{3 \times 1^2 + 1} \geq \dfrac{\sqrt{2^3} - 0}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{3 \times 1^2 + 1} \geq 2$

* pour $n = 3$ on a : $\sqrt{3 \times 3^2 + 1} \geq \dfrac{\sqrt{(3+1)^3} - \sqrt{(3-1)^3}}{\sqrt{2}}$

$\iff \sqrt{3 \times 3^2 + 1} \geq \dfrac{\sqrt{4^3} - \sqrt{2^3}}{\sqrt{2}}$

$\iff \sqrt{3 \times 3^2 + 1} \geq \dfrac{8 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

pour $n = 5$ on a : $\sqrt{3\times 5^2+1} \geqslant \dfrac{\sqrt{(5+1)^3} - \sqrt{(5-1)^3}}{\sqrt{2}}$

$\iff \sqrt{3\times 5^2+1} \geqslant \dfrac{6\sqrt{6} - 8}{\sqrt{2}}$

pour $n = 7$ on a : $\sqrt{3\times 7^2+1} \geqslant \dfrac{\sqrt{(7+1)^3} - \sqrt{(7-1)^3}}{\sqrt{2}}$

$\iff \sqrt{3\times 7^2+1} \geqslant \dfrac{16\sqrt{2} - 6\sqrt{6}}{2}$

$\vdots$

pour $n = 2017$ on a : $\sqrt{3\times 2017^2+1} \geqslant \dfrac{\sqrt{(2017+1)^3} - \sqrt{(2017-1)^3}}{\sqrt{2}}$

$\iff \sqrt{3\times 2017^2+1} \geqslant \dfrac{2018\sqrt{2018} - 2016\sqrt{2016}}{\sqrt{2}}$

pour $n = 2019$ on a : $\sqrt{3\times 2019^2+1} \geqslant \dfrac{\sqrt{(2019+1)^3} - \sqrt{(2019-1)^3}}{\sqrt{2}}$

$\iff \sqrt{3\times 2019^2+1} \geqslant \dfrac{2020\sqrt{2020} - 2018\sqrt{2018}}{\sqrt{2}}$

on a $\sqrt{3\times 1^2+1} + \sqrt{3\times 3^2+1} + \dots + \sqrt{3\times 2017^2+1} + \sqrt{3\times 2019^2+1} \geqslant$

$2 + \dfrac{8 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \dfrac{6\sqrt{6} - 8}{\sqrt{2}} + \dfrac{16\sqrt{2} - 6\sqrt{6}}{\sqrt{2}} + \dots +$

$\dfrac{2018\sqrt{2018} - 2016\sqrt{2016}}{\sqrt{2}} + \dfrac{2020\sqrt{2020} - 2018\sqrt{2018}}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \quad S \geqslant \dfrac{2\sqrt{2} + 8 - 2\sqrt{2} + 6\sqrt{6} - 8 + 16\sqrt{2} - 6\sqrt{6} + \dots + 2018\sqrt{2018} - 2016\sqrt{2016} + 2020\sqrt{2020} - 2018\sqrt{2018}}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \quad S \geqslant \dfrac{2020\sqrt{2020}}{\sqrt{2}} \Rightarrow S \geqslant 2020\sqrt{1010}$

et $\sqrt{2010} \geqslant \sqrt{1010}$ donc $S \geqslant 2020\sqrt{2010}$

$* (a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$

$(ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = a^2c^2 + 2ac\times bd + b^2d^2 + a^2d^2 - 2ad\times bc + b^2c^2$

$= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2$

d'où $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$

b) On a $5^2 + 6^2 = 61$ et $7^2 + 8^2 = 113$

on pose $a = 5$; $b = 6$; $c = 7$ et $d = 8$

$\Rightarrow (a^2+b^2)(c^2+d^2) = 61\times 113$

donc $(5\times 7 + 6\times 8)^2 + (5\times 8 - 6\times 7)^2 = 61\times 113$

donc $61\times 113 = 83^2 + (-2)^2 \Rightarrow 61\times 113 = 78^2 + 2^2$

Ex 2:

1) $(E): \sqrt{5-|x|} < 2$ C.E : il faut que $5-|x| \geq 0$

$\Leftrightarrow |x| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5$

Pour tout $x \in [-5;5]$ on a : $5-|x| < 4$

$\Rightarrow 5-|x|-4 < 0 \Leftrightarrow 1-|x| < 0 \Leftrightarrow |x| > 1$

donc $x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

Or on a $x \in [-5;5]$

d'où $S_{\mathbb{R}} = (]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[) \cap [-5;5]$

$\Leftrightarrow S_{\mathbb{R}} = [-5;-1[\cup]1;5]$

2) *) $|x+2| = -x^2 + 1 - \sqrt{2}$

C.E : il faut que $-x^2 + 1 - \sqrt{2} \geq 0$

$\Leftrightarrow \Delta = 1 - 4\sqrt{2} < 0$

3

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$-x^2+1-\sqrt{2}$	$-$

Or $-x^2+1-\sqrt{2} \in \mathbb{R}_-$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

**) $\dfrac{x-3}{2x+5} \geq 2$ C.E : il faut que $2x+5 \neq 0$

$\iff x \neq \dfrac{-5}{2}$

$\Rightarrow$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{-5}{2} \right\}$ on a :

$$\frac{x-3}{2x+5} \geq 2 \iff \frac{x-3}{2x+5} - \frac{2(2x+5)}{2x+5} \geq 0$$

$$\iff \frac{x-3-4x-10}{2x+5} \geq 0 \iff \frac{-3x-13}{2x+5} \geq 0$$

* $-3x-13=0 \iff x = \dfrac{-13}{3}$
* $2x+5=0 \iff x = \dfrac{-5}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{-13}{3}$		$-5/2$		$+\infty$
$-3x-13$		$+$		$-$		$-$	
$2x+5$		$-$		$-$		$+$	
$\dfrac{-3x-13}{2x+5}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

$S_{\mathbb{R}} = \left[\dfrac{-13}{3} ; \dfrac{-5}{2} \right[$

3) a) ~~$\forall x^2+1$~~ Pour $x \geq 0$ on a $x^2+1 \geq x^2 \geq 0$

donc $\sqrt{x^2+1} \geq x$

Pour $x \leq 0$ on a $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+1 \geq 1 \geq 0$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+1} \geq 0$ or $x \leq 0$

donc $\sqrt{x^2+1} \geq x$

d'où pour tout réel x on a $\sqrt{x^2+1} > x$.

Ex 3 :

1) $x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow 1 - 6 + 5 = 0$ $(a+b+c=0)$

donc $x' = 1$ et $x'' = 5$

4

2) $\vec{u}\begin{pmatrix} m^2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ m^2-6 \end{pmatrix}$ sont colinéaires donc

$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} m^2 & 5 \\ -1 & m^2-6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m^2(m^2-6) - (-5) = 0$

$\Rightarrow m^4 - 6m^2 + 5 = 0$

on pose : $X = m^2$ donc $m^2 = 1$ ou $m^2 = 5$

On pose $B(x,y)$

on a $OB=4$ et $AB=3$ et on a $OB=\sqrt{x_B^2+y_B^2}=\sqrt{x^2+y^2}$

et $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(x-5)^2+y^2}$

$=\sqrt{x^2-10x+25+y^2}$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=4$ et $\sqrt{x^2+y^2-10x+25}=3$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=16 & (1) \\ x^2+y^2-10x+25=9 & (2) \end{cases}$

$(1)-(2) \Rightarrow x^2+y^2-x^2-y^2+10x-25=16-9=7$

$\Leftrightarrow 10x-25=7 \Rightarrow 10x=32 \Rightarrow x=\frac{32}{10}=\frac{16}{5}$

(1): $x^2+y^2=16 \Rightarrow y^2=16-\left(\frac{16}{5}\right)^2=16-\frac{256}{25}$

$=\frac{400-256}{25}=\frac{144}{25}$

$\Rightarrow y=\frac{12}{5}$ ou $y=-\frac{12}{5}$

Or $y_B<0$ (d'après le schéma)

$\Rightarrow B\left(\frac{16}{5};-\frac{12}{5}\right)$

2) $\|\vec{MA}+\vec{MO}\|=\|2\vec{MA}-2\vec{MB}\|$, on a $I=O*A$

donc $\|2\vec{MI}\|=\|2\vec{MA}+2\vec{BM}\| \Leftrightarrow \cancel{2}\|\vec{MI}\|=\cancel{2}\|\vec{BA}\|$

$\Rightarrow MI=AB \Rightarrow M\in\mathcal{C}_{(I;AB)}$ et $AB=3$

donc $M\in\mathcal{C}_{(I;3)}$

$(E)=\mathcal{C}_{(I;3)}$

3) a)

$C\left(2;\frac{-5}{4}\right)$ dans $R'=(O,\vec{OI},\vec{OB})$ donc $\vec{OC}=2\vec{OI}-\frac{5}{4}\vec{OB}$

$\vec{OB}=\frac{16}{5}\vec{OI}-\frac{12}{5}\vec{OJ} \Rightarrow \vec{OC}=2\vec{OI}-\frac{5}{4}\left(\frac{16}{5}\vec{OI}-\frac{12}{5}\vec{OJ}\right)$

$\Rightarrow \vec{OC}=2\vec{OI}-4\vec{OI}+3\vec{OJ} \Rightarrow \vec{OC}=-2\vec{OI}+3\vec{OJ}$

$\Rightarrow C(-2;3)$ dans $R(O,\vec{OI},\vec{OJ})$

$\vec{AC}\begin{pmatrix}-7\\3\end{pmatrix}$ $\quad \vec{OB}\begin{pmatrix}\frac{16}{5}\\-\frac{12}{5}\end{pmatrix}$

5

donc $m = 1$ ou $m = -1$ ou $m = 5$ ou $m = -5$

Ex4 :

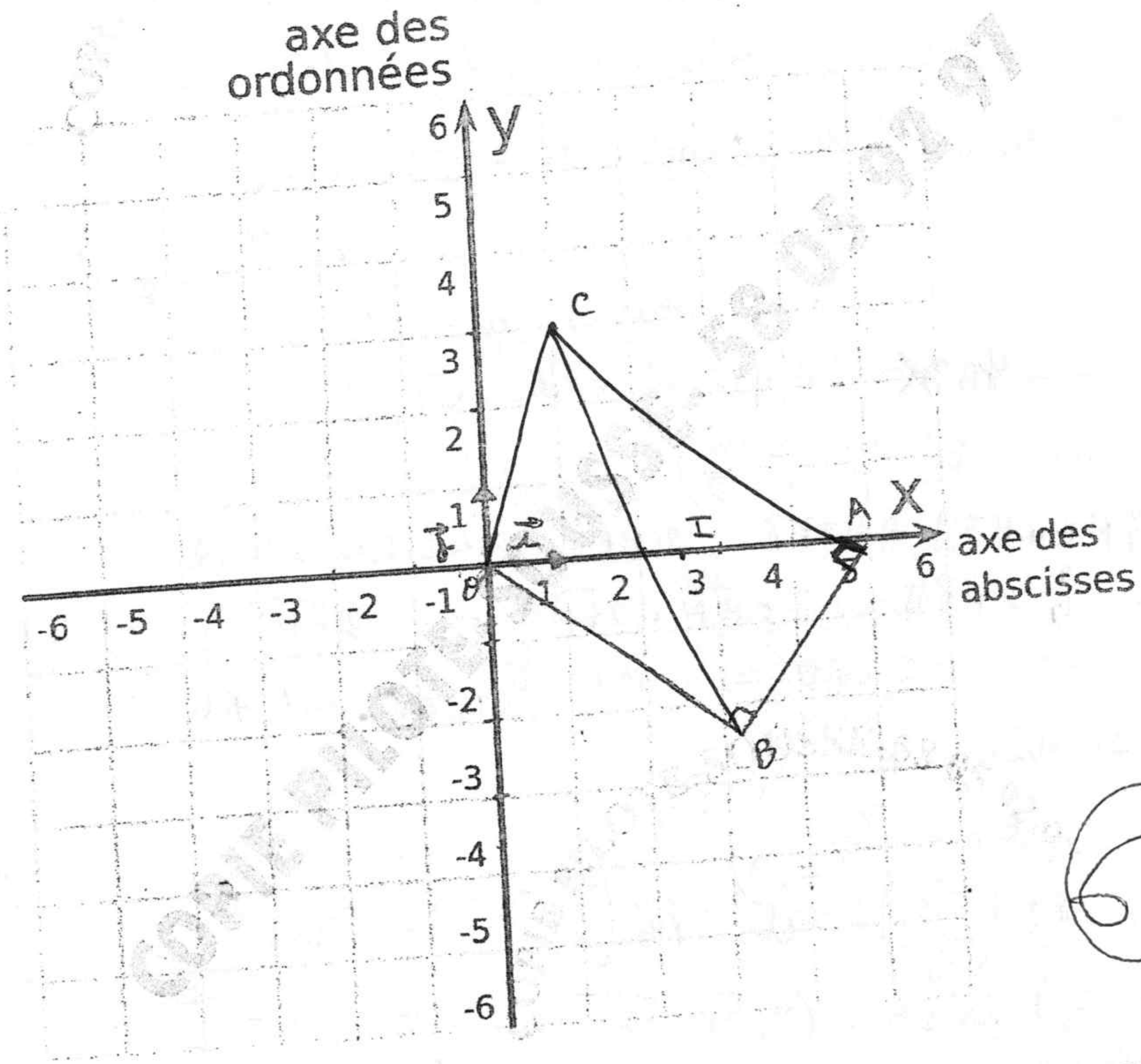
1) a) On a OAB un triangle rectangle en B donc $S_{OAB} = \frac{OB \times AB}{2} = 6$

$\Rightarrow AB \times OB = 12 \Leftrightarrow AB = \frac{12}{OB} = \frac{12}{4} = 3$

donc $AO^2 = OB^2 + BA^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow AO = \sqrt{25} = 5$

$A \in (O, \vec{i})$ donc $OA = |x_A| = 5$ donc $x_A = 5$ ou $x_A = -5$

Or $A \in [O, \vec{i})$ et $y_A = 0 \Rightarrow A(5;0)$



6

$C(2; -\frac{5}{4})$ dans $R'(O, \vec{OI}, \vec{OB})$

$\Rightarrow \vec{OC} = 2\vec{OI} - \frac{5}{4}\vec{OB}$

On a dans $R^{5}(O, \vec{i}, \vec{j})$: ~~$\vec{AB}$ ... $\frac{14}{5}\vec{OI}$~~

$\vec{OB} = \frac{16}{5}\vec{i} - \frac{12}{5}\vec{j}$

et $\vec{OI} = \frac{5}{2}\vec{i}$ car $I(\frac{5}{2}; 0)$ $[I = A * O]$

$\Rightarrow \vec{OC} = 2\left(\frac{5}{2}\vec{i}\right) - \frac{5}{4}\left(\frac{16}{5}\vec{i} - \frac{12}{5}\vec{j}\right)$

$\Rightarrow \vec{OC} = 5\vec{i} - 4\vec{i} + 3\vec{j} = \vec{i} + 3\vec{j}$

$\Rightarrow C(1; 3)$

$\vec{AC}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{OB}\begin{pmatrix}\frac{16}{5}\\-\frac{12}{5}\end{pmatrix}$

$\det(\vec{AC}, \vec{OB}) = \begin{vmatrix}-4 & \frac{16}{5}\\ 3 & -\frac{12}{5}\end{vmatrix} = (-4)\times\left(-\frac{12}{5}\right) - 3\times\frac{16}{5} = \frac{48}{5} - \frac{48}{5} = 0$

$\vec{AC}$ et $\vec{OB}$ sont colinéaires donc $(AC) \parallel (OB)$

b) $(AC) \parallel (OB)$ et $(AB) \perp (OB)$ $\Rightarrow (AC) \parallel (OB)$

$\Rightarrow ACOB$ un trapèze

$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$

$S_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{3 \times 5}{2} = \frac{15}{2}$

$S_{ACOB} = \frac{AB(AC + OB)}{2} = \frac{3 \times (5 + 4)}{2} = \frac{27}{2}$

$S_{OBC} = S_{ACOB} - S_{ABC} = 30 - \frac{15}{2} = \frac{27}{2} - \frac{15}{2} = \frac{12}{2} = 6$

$\Rightarrow S_{OBC} = 6.$