Devoir de Contrôle n°1- Lycée Pilote de Bizerte

Exercice°1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, répondre par Vrai ou Faux , en justifiant la réponse .

1. $\left|\sqrt{\frac{\pi}{4}}-\frac{\pi}{4}\right|=\sqrt{\frac{\pi}{4}}-\frac{\pi}{4}$.

2. L'ensemble des solutions de l'équation $\left||x|-3\right|=|x|-3$ est $S_{\mathbb{R}}=[3;+\infty[$.

3. $3\sqrt{18-8\sqrt{2}}+\sqrt{19-6\sqrt{2}}$ est un entier .

Exercice°2 (9 points)

Les questions I/, II/ et III/ sont indépendantes :

I/ Soient a, b et c trois réels non nuls tels que : a+b+c=0.

1. (a) Montrer que $a^2+b^2=c^2-2ab$.

   (b) Factoriser a^3+b^3. En déduire que $a^3+b^3+c^3=3abc$.

2. Résoudre alors dans $\mathbb{R}$, l'équation $\left(x^2+\sqrt{2}\right)^3+(1-x^2)^3-\left(1+\sqrt{2}\right)^3=0$

II/ 1.Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}=\frac{2}{(2n-1)\times(2n+1)}$.

2. Calculer alors $S=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots\ldots+\frac{1}{2013\times2015}$.

III/ 1. Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\sqrt{2k-1}\times\sqrt{2k+1}<2k$.

2. En déduire que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\frac{2k-1}{2k}<\frac{\sqrt{2k-1}}{\sqrt{2k+1}}$.

3. Montrer alors que : $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\ldots\ldots\times\frac{2011}{2012}\times\frac{2013}{2014}<\frac{1}{\sqrt{2015}}$.

Exercice°3 (8 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on considère les points A(5 ;-2), B(1 ;0) et C(-1 ;-4). On désigne par I le milieu du segment [AC].

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle de sommet principal B.

2. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M du plan vérifiant : $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\|=2\sqrt{10}$.

   (a) Montrer que $\mathcal{C}$ est le triangle circonscrit au triangle ABC.

   (b) Soit $F(m;2)$. Déterminer le réel m sachant que la droite (BF) est tangente au cercle $\mathcal{C}$.

3. Soit G le centre de gravité du triangle ABC.

   (a) Déterminer les coordonnées de G dans le repère $(B,\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$.

   (b) Déduire que $G(\frac{5}{3};-2)$ dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

   (c) On prend m=7. Vérifier que les points C,F et G sont alignés .

Correction

Exercice°1 (Vrai-Faux)

1. **FAUX.** Justification : Si $0 \le x \le 1$, alors $\sqrt{x} - x = \underbrace{\sqrt{x}}_{\ge 0} \times \underbrace{(1-\sqrt{x})}_{\ge 0} \ge 0$

donc $\sqrt{x} \ge x$. Or $0 < \frac{\pi}{4} < 1$, donc on a : $\sqrt{\frac{\pi}{4}} \ge \frac{\pi}{4} \Rightarrow \left|\sqrt{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi}{4}\right| = \sqrt{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi}{4}$.

2. **FAUX.** Remarquer que -4 est solution de l'équation bien que $-4 \notin [3; +\infty[$. En fait

$$S_{\mathbb{R}} =]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[$$

3. **VRAI .**

$$3\sqrt{18-8\sqrt{2}} - \sqrt{19-6\sqrt{2}} = 3\sqrt{16-2\times4\times\sqrt{2}+2} - \sqrt{18-2\times3\sqrt{2}\times1+1} = 3\sqrt{\left(4-\sqrt{2}\right)^2} - \sqrt{\left(3\sqrt{2}-1\right)^2}$$
$$= 3\times\left|4-\sqrt{2}\right| - \left|3\sqrt{2}-1\right| = 3\times\left(4-\sqrt{2}\right) - \left(3\sqrt{2}-1\right) = 11 \in \mathbb{N}.$$

Exercice°2 (Activités algébriques : produits remarquables, inégalités)

I/ 1. (a) $a^2 + b^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - 2ab = (a+b)^2 - 2ab = (-c)^2 - 2ab = \boxed{c^2 - 2ab}$

(b) $a^3 + b^3 = (a+b) \times (a^2 - ab + b^2) = \boxed{-c \times (c^2 - 3ab)}$

$$a^3 + b^3 + c^3 = -c \times (c^2 - 3ab) + c^3 = -c^3 + 3abc + c^3 = 3abc.$$

2. On choisit : $a = x^2 + \sqrt{2}, b = 1 - x^2$ *et* $c = -1 - \sqrt{2}$. On vérifie facilement que $a + b + c = 0$. Par I/1.

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = \left(x^2 + \sqrt{2}\right)^3 + (1 - x^2)^3 + \left[-\left(1+\sqrt{2}\right)\right]^3$$
$$= \left(x^2 + \sqrt{2}\right)^3 + (1 - x^2)^3 - \left(1+\sqrt{2}\right)^3$$
$$= -3 \times \left(x^2 + \sqrt{2}\right) \times (1 - x^2) \times \left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + \sqrt{2}\right)^3 + (1 - x^2)^3 - \left(1+\sqrt{2}\right)^3$$
$$= 0 \Leftrightarrow -3 \times \left(x^2 + \sqrt{2}\right) \times (1 - x^2) \times \left(1+\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow 1 - x^2$$
$$= 0$$

II/ 1. $\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n+1-2n+1}{(2n-1)\times(2n+1)} = \frac{2}{(2n-1)\times(2n+1)}$.

$$2.\ S = \frac{1}{1\times3} + \frac{1}{3\times5} + \ldots + \frac{1}{2013\times2015} = \frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{1\times3} + \frac{2}{3\times5} + \ldots + \frac{2}{2013\times2015}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\times\left[\left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2013} - \frac{1}{2015}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\times\left(1 - \frac{1}{2015}\right) = \frac{2014}{2\times2015} = \frac{1007}{2015}.$$

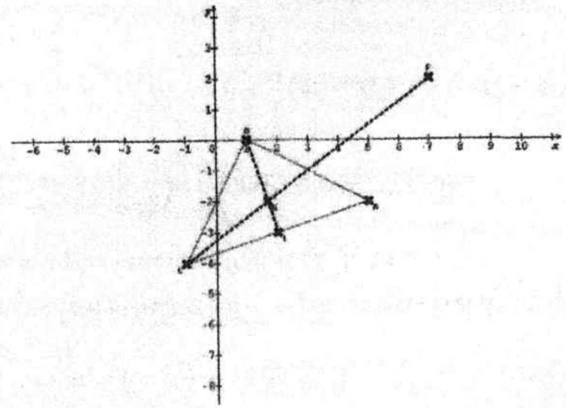
III/ 1. $\sqrt{2k-1} \times \sqrt{2k+1} = \sqrt{(2k-1)\times(2k+1)} = \sqrt{4k^2-1}$. Or :

$$0 < 4k^2 - 1 < 4k^2 \Rightarrow \sqrt{4k^2-1} < \sqrt{4k^2} = 2k \Rightarrow \sqrt{2k-1} \times \sqrt{2k+1} < 2k.$$

2. $\frac{2k-1}{2k} = \frac{\sqrt{2k-1}^2}{2k} < \frac{\sqrt{2k-1}^2}{\sqrt{2k-1}\times\sqrt{2k+1}} = \frac{\sqrt{2k-1}}{\sqrt{2k+1}}$.

$$3.\ \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \ldots\ldots \times \frac{2013}{2014} = \frac{2\times1-1}{2\times1+1} \times \frac{2\times2-1}{2\times2+1} \times \ldots \frac{2\times1007-1}{2\times1007+1}$$
$$< \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \times \ldots \times \frac{\sqrt{2013}}{\sqrt{2015}} = \frac{1}{\sqrt{2015}}$$

Exercice°3 (Calcul Vectoriel – Géométrie Analytique)



1. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$

$$xx' + yy' = (-2)\times 4 + (-4)\times(-2) = -8+8 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{BA}.$$

$BC = BA = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\Rightarrow$ *ABC est rectangle et isocèle de sommet principal B.*

2. $M \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\| = 2\sqrt{10} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\| = 2\sqrt{10}$

$$\Leftrightarrow \left\| 2\overrightarrow{MI} + \underbrace{(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})}_{\vec{0}} \right\| = 2\sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow 2IM = 2\sqrt{10} \Leftrightarrow IM = \sqrt{10} = \frac{AC}{2}$$

Par conséquent $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{10} = IA = IB = IC$ (à vérifier) , donc c'est le cercle circonscrit au triangle ABC.

(b) La droite (BF) est tangente au cercle $(\mathcal{C})$ (à fortiori en B) si et seulement si $\overrightarrow{BF}\perp\overrightarrow{BI}$.

Exercice : *Soit MNP un triangle véritable dans le plan rapporté à un repère orthonormé. Montrer que le centre de gravité G du triangle MNP a pour coordonnées :* $\begin{cases} x_G = \frac{x_M+x_N+x_P}{3} \\ y_G = \frac{y_M+y_P+y_N}{3} \end{cases}$.

(c) D'après 3. (b), pur m = 7, on a :

$$\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CG}\begin{pmatrix}\frac{8}{3}\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \text{dét}(\overrightarrow{CF},\overrightarrow{CG}) = \begin{vmatrix} 8 & \frac{8}{3} \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 8\times 2 - 6\times\frac{8}{3} = 16-16 = 0.$$

Par conséquent les vecteurs $\overrightarrow{CG}$ *et* $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires donc les droites (CG) et (CF) sont parallèles , donc les points C,F et G sont alignés .

Aussi pourrait-on remarquer , sans avoir recours aux déterminants , que $\overrightarrow{CG} = 3\overrightarrow{CF}$.

$$\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}m-1\\2\end{pmatrix}. \begin{cases} x_I = \frac{x_A+x_C}{2} = 2 \\ y_I = \frac{y_A+y_C}{2} = -3 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}. \overrightarrow{BF}\perp\overrightarrow{BI}. \Leftrightarrow xx'+yy'$$

$$= 0 \Leftrightarrow m-1-6 = 0 \Leftrightarrow \boxed{m=7}$$

3. (a) $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, alors G est de couple-coordonnées $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ dans le repère cartésien $(B,\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$. Or :

$$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})} \text{ et } \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})} \text{ donc il s'ensuit que :}$$

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BG} = \vec{\imath}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \vec{\imath}+\frac{1}{3}(4\vec{\imath}-2\vec{\jmath})+\frac{1}{3}(-2\vec{\imath}-4\vec{\jmath})$$

$$= \left(1+\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\right)\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{5}{3}\vec{\imath}-2\vec{\jmath} \Rightarrow G\left(\frac{5}{3};-2\right) \text{ dans le repère } (O;\vec{\imath};\vec{\jmath}).$$

On propose au cher lecteur l'exercice utile suivant (coordonnées de l'isobarycentre ou centre de gravité) :