Lycée Pilote Sfax	Devoir de Contrôle N°2	2SC : 2-3
Mr Hadjkacem		1h

12

Exercice 1 : (6 pts)

1) Résoudre dans IR : a) $(1-x-2x^2)(x^2+x-2)<0$ b) $4-x \leq \frac{2}{x-1}$

2) Déterminer les couples (a,b) de réels solutions du système $\begin{cases} a+|b| = \frac{-7}{4} \\ a^2b^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$

Exercice 2 : (5 pts)

On considère le trinôme $T(x) = ax^2+bx+c$ tels que $a \in IR^*_-$, $b \in IR$ et $c \in IR$
On suppose que $T(-4)>0$ et $T(-2)<0$
1)a) Montrer que $T(x)$ admet deux racines distinctes (notées à la suite x' et x'' tel que $x' < x''$)

b) Dresser le tableau de signe de $T(x)$ puis ranger dans l'odre croissant les réels x' , x'', -4 et -2

c) Déterminer le signe de chacun des réels b et c

2) Résoudre dans IR l'inéquation $(2x-3x').T(x) \leq 0$

Exercice 3 : (9 pts)

Soit ABC un triangle isocèle en A
I le barycentre des points pondérés (A, 4), (B,-1) et J le barycentre des points pondérés (A, 4), (C,-1)
1) a) Construire les points I et J
b) Montrer que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles
2) Soit G le barycentre des points pondérés (A, 8), (B,-1) et (C,-1)
Montrer que G est le milieu du segment [IJ]
3) Les droites (BG) et (CJ) se coupent en O
Exprimer O comme barycentre de C et J
4) Soit (E) l'ensemble des points M du plan tel que $\|4\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\| = \|4\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\|$
a) Vérifier que $A \in (E)$
b) Déterminer l'ensemble (E)

Lycée Pilote F.H. Sfax — Devoir Contrôle N°2 — Mr Hadj Kacem

2sc-21-3

Exercice 1 : (6 pts)

1) a) $1 - x - 2x^2 = 0$; $a - b + c = 0$

$x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{1}{2}$

$x^2 + x - 2 = 0$; $a + b + c = 0$

$x' = 1$ et $x'' = -2$

x	$-\infty$	-2	-1	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$1-x-2x^2$	$-$		0 $+$	0	$-$	
x^2+x-2	$+$	0	$-$		0	$+$
P	$-$	0 $+$	0 $-$	0 $+$	0	$-$

Donc $S_{\mathbb{R}} =]-\infty, -2[\cup]-1, \frac{1}{2}[\cup]1, +\infty[$

b) Condition : $x - 1 \neq 0$ soit $x \neq 1$

Dans $\mathbb{R}\setminus\{1\}$: $4 - x < \frac{2}{x-1}$

équivaut $\frac{-x^2+5x-6}{x-1} < 0$

Soit $T(x) = -x^2 + 5x - 6$

$\Delta = 1 > 0$; $x_1 = 3$ et $x_2 = 2$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$T(x)$	$-$		$-$ 0	$+$ 0	$-$
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{T(x)}{x-1}$	$+$	‖	$-$ 0	$+$ 0	$-$

Donc $S_{\mathbb{R}} =]1, 2[\cup]3, +\infty[$

2) $\begin{cases} a + |b| = -\frac{7}{4} \\ a^2 b^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$ équivaut $\begin{cases} a + |b| = -\frac{7}{4} \\ -a|b| = \frac{1}{2} \end{cases}$ ($a < 0$)

Soit $\begin{cases} a + |b| = -\frac{7}{4} \\ a \cdot |b| = -\frac{1}{2} \end{cases}$ Donc a et $|b|$ s'ils existent sont solutions de l'équation

$X^2 + \frac{7}{4}X - \frac{1}{2} = 0$

$\Delta = \frac{81}{16}$ Donc $x_1 = -2$ et $x_2 = \frac{1}{4}$

Donc $\begin{cases} a = -2 \\ |b| = \frac{1}{4} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} a = -2 \\ b = \frac{1}{4} \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = -2 \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases}$

d'où $(a, b) \in \left\{ \left(-2; \frac{1}{4}\right); \left(-2; -\frac{1}{4}\right) \right\}$

Exercice 2 : (5 pts)

1) a) $T(x)$ est un trinôme du second degré qui change de signe ($T(-4) > 0$ et $T(-2) < 0$)

Donc $T(x)$ admet deux racines distinctes.

b) $T(x)$ admet deux racines distinctes x' et x'' tel que $x' < x''$ et $a < 0$

x	$-\infty$		x'		x''		$+\infty$
$T(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$T(-4) > 0$ Donc $-4 \in]x'; x''[$

$T(-2) < 0$ Donc $-2 \in]-\infty; x'[\cup]x''; +\infty[$

or $-4 < -2$ Donc $x' < -4 < x'' < -2$

c) Puisque $x' < -4 < x'' < -2$ alors $x' < 0$ et $x'' < 0$

Donc $x'x'' > 0$ et $x' + x'' < 0$

$\frac{c}{a} > 0$ et $\frac{-b}{a} < 0$

d'où $c < 0$ et $b < 0$ (car $a < 0$)

Conclusion : $c \in \mathbb{R}^{*}_{-}$ et $b \in \mathbb{R}^{*}_{-}$

Exercice 3 : (3 pts)

1) a) I bary $(A, 4), (B, -1)$ équivaut à $\vec{AI} = \frac{-1}{3}\vec{AB}$

J bary $(A, 4); (C, -1)$ équivaut $\vec{AJ} = \frac{-1}{3}\vec{AC}$

b) $\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AJ}$

$= \frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC} = \frac{1}{3}\vec{CB}$

Donc $\vec{IJ}$ et $\vec{CB}$ sont colinéaires par suite $(IJ) // (BC)$.

2) G bpp $(A, 8)$, $(B, -1)$, $(C, -1)$

$8\vec{GA} - \vec{GB} - \vec{GC} = \vec{0}$

$(4\vec{GA} - \vec{GB}) + (4\vec{GA} - \vec{GC}) = \vec{0}$

$3\vec{GI} + 3\vec{GJ} = \vec{0}$, $\begin{pmatrix} I \text{ bpp } (A,4);(B,-1) \\ J \text{ bpp } (A,4);(C,-1) \end{pmatrix}$

G est l'isobarycentre de I et J donc G milieu de $[IJ]$

3) D'après 1) b), $\vec{IJ} = \frac{1}{3}\vec{CB}$

Donc $2\vec{GJ} = \frac{1}{3}\vec{CB}$, (G milieu de $[IJ]$)

D'où $\vec{GJ} = -\frac{1}{6}\vec{BC}$

D'autre part $O \in (CJ)$ donc $\vec{OJ}$ et $\vec{OC}$ sont colinéaires

Alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{OJ} = k\vec{OC}$

Appliquons la forme vectorielle du th de Thalès ds OGJ.

$\left.\begin{array}{l} B \in (OG),\ C \in (OJ) \\ (GJ) // (BC),\ \text{car } (IJ)//(BC) \text{ et } G \in (IJ) \\ \vec{OJ} = k\vec{OC} \end{array}\right\}$ donc $\vec{OG} = k\vec{OB}$ et $\vec{GJ} = k\vec{BC}$

et comme $\vec{GJ} = -\frac{1}{6}\vec{BC}$ alors $k = -\frac{1}{6}$

D'où $\vec{OJ} = -\frac{1}{6}\vec{OC}$

$\vec{OC} + 6\vec{OJ} = \vec{0}$

Par suite O bpp $(C, 1)$; $(J, 6)$

1) a) la condition d'appartenance d'un point M du plan à l'ensemble (E) est

$$\|4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\| = \|4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\|$$

On a : $\|4\overrightarrow{AA} - \overrightarrow{AB}\| = AB$ et $\|4\overrightarrow{AA} - \overrightarrow{AC}\| = AC$

Comme ABC triangle isocèle en A alors $AB = AC$

donc $A \in (E)$

b) $M \in (E)$ équivaut $\|4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\| = \|4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\|$

équivaut $\|3\overrightarrow{MI}\| = \|3\overrightarrow{MJ}\|$; $\begin{cases} I \text{ bary } (A,4);(B,-1) \\ J \text{ bary } (A,4);(C,-1) \end{cases}$

équivaut $MI = MJ$

équivaut M appartient à la médiatrice Δ de $[IJ]$

d'où $(E) = \Delta$