Prof : Fourati Classe: 2Sciences	**Devoir de contrôle N°3**	Date : 25/01/2025 Durée : 1 h

Exercice 1 : (4pts)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

1°/ a- Calculer u_0 ; u_1 et u_2

b- La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Justifier votre réponse.

2°/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la somme $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

a- Calculer S_1

b- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $S_n = \sqrt{n+1}$.

c- En déduire la valeur de S_{120}

Exercice 2 : (8pts)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique tel que $u_{10} = 55$ et $u_{25} = 145$

1°/ a -Montrer que la suite (u_n) est de raison $r = 6$ et que son premier terme $u_0 = -5$.

b –Calculer la somme $S = 55 + 61 + 67 + \cdots + 145$.

2°/ Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \frac{1}{2}(u_n + 1) + n$.

a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) + 1$

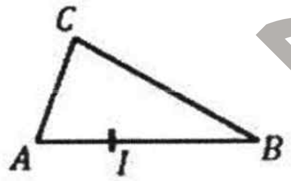
b- En déduire que v_n est une suite arithmétique de raison $r' = 4$ et de premier terme $v_0 = -2$.

c- Ecrire le terme général de la suite v_n.

3°/ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on donne $S_n = v_n + v_{n+1} + \cdots + v_{2n+5}$. Calculer S_{10}

Exercice 3 : (8pts)

La figure ci-contre est celle d'un triangle ABC tel que $AB = 2AC$ et I le barycentre de $(A,2)$ et $(B,1)$



Soit l'application h définie par

$$h : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$$
$$M \mapsto M' \text{ tel que } 2\overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

1°/a- Vérifier que $h(B) = A$.

b- Montrer que l'application h admet un seul point invariant.

c- Montrer que h est l' homothétie de centre I et rapport $\left(-\frac{1}{2}\right)$

2°/ La droite Δ parallèle à (BC) passant par A coupe la droite (IC) en C'.

a- Justifier que $h\big((BC)\big) = \Delta$.

b- Montrer que $h(C) = C'$.

3°/ On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre B passant par A et le cercle $\mathscr{C}'$ de centre A passant par C

a- Justifier que $h(\mathscr{C}) = \mathscr{C}'$

b- Le cercle $\mathscr{C}'$ coupe $[AI]$ en A'. Montrer que $h(A) = A'$.

Ex 1

$U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

1°/ a/ $U_0 = \sqrt{0+1} - \sqrt{0} = 1$

$U_1 = \sqrt{1+1} - \sqrt{1} = \sqrt{2} - 1$

$U_2 = \sqrt{2+1} - \sqrt{2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

b/ $U_1 - U_0 = (\sqrt{2} - 1) - 1 = \sqrt{2} - 2$

$U_2 - U_1 = (\sqrt{3} - \sqrt{2}) - (\sqrt{2} - 1) = \sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1$

$U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$ donc la Suite n'est pas arithmétique

2°/ $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

a/ $S_1 = U_0 + U_1 = 1 + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2}$

b/ $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

$= (\cancel{\sqrt{1}} - \sqrt{0}) + (\cancel{\sqrt{2}} - \cancel{\sqrt{1}}) + (\sqrt{3} - \cancel{\sqrt{2}}) + \cdots + \sqrt{n+1} - \cancel{\sqrt{n}}$

$= \sqrt{n+1}$

c/ $S_{120} = \sqrt{120+1} = \sqrt{121} = 11$

Ex 2

$U_{10} = 55$, $U_{25} = 145$

1°/ a/ $\dfrac{U_{25} - U_{10}}{25 - 10} = \dfrac{145 - 55}{15} = \dfrac{90}{15} = 6$ donc (U_n) Suite arith de raison $\boxed{r = 6}$

$U_{10} = U_0 + 10 \times 6 \Leftrightarrow 55 = U_0 + 60 \Leftrightarrow U_0 = 55 - 60$

$\Rightarrow \boxed{U_0 = -5}$

donc (U_n) suite arithmétique de raison $r = 6$
et de 1ier terme $U_0 = -5$

b/ $S = \underset{\substack{\uparrow \\ U_{10}}}{55} + 61 + 67 + \cdots + \underset{\substack{\uparrow \\ U_{25}}}{145} = (25 - 10 + 1) \cdot \dfrac{U_{10} + U_{25}}{2}$

$= 16 \times \dfrac{55 + 145}{2}$

$= 1600$

$V_n = \frac{1}{2}(U_n + 1) + n$

a/ $V_{n+1} - V_n = \left[\frac{1}{2}(U_{n+1} + 1) + n + 1\right] - \left[\frac{1}{2}(U_n + 1) + n\right]$

$= \frac{1}{2}U_{n+1} + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{n} + 1 - \frac{1}{2}U_n - \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{n}$

$= \frac{1}{2}U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n + 1 = \frac{1}{2}(U_{n+1} - U_n) + 1$

b/ on sait que (U_n) suite arithmétique de raison $r = 6$

donc $U_{n+1} - U_n = 6$

$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{2}(U_{n+1} - U_n) + 1 = \frac{1}{2} \times 6 + 1 = 4$

d'ou (V_n) suite arithmétique de raison $r' = 4$

et de 1er terme $V_0 = \frac{1}{2}(U_0 + 1) + 0 = \frac{1}{2}(-5 + 1) = -2$

c/ $V_n = V_0 + n.r \Leftrightarrow V_n = -2 + 4n$

3°/ $S_n = V_n + V_{n+1} + \dots + V_{2n+5}$

$S_{10} = V_{10} + V_{11} + \dots + V_{25} = (25 - 10 + 1)\ \frac{V_{10} + V_{25}}{2}$

$= 16 . \frac{V_{10} + V_{25}}{2}$; $V_{10} = -2 + 4 \times 10 = 38$
$V_{25} = -2 + 4 \times 25 = 98$

$= 16 . \frac{38 + 98}{2}$

$= 1088$

Ex3 homothétie

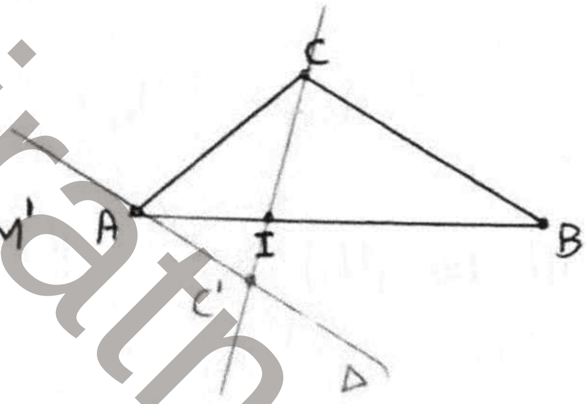
$AB = 2AC$

I bary $(A,2)(B,1)$

$h : P \longrightarrow P$

$M \longrightarrow M'$

tel que $2\overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$



1°/a/ on a $h(M) = M'$ si $h(B) = M'$

Alors $h(B) = 2\overrightarrow{M'A} + \underbrace{\overrightarrow{BB}}_{\vec{0}} = \vec{0}$

$2\overrightarrow{M'A} = \vec{0}$

donc $M' = A$

$\Rightarrow h(B) = A$

b/ si h admet un point invariant M Alors $h(M) = M$

$h(M) = M \iff 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ or I bary $(A,2)(B,1)$

donc $2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \iff 3\overrightarrow{MI} + \underbrace{2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}}_{\vec{0}} = \vec{0}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{MI} = \vec{0} \iff M = I$ donc si h admet

un point invariant ce point est I

c) $2\overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \iff 2\overrightarrow{M'I} + 2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$2\overrightarrow{M'I} + \overrightarrow{MI} + \underbrace{2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}}_{\vec{0}} = \vec{0} \iff 2\overrightarrow{M'I} + \overrightarrow{MI} = \vec{0}$

$2\overrightarrow{M'I} = -\overrightarrow{MI} \iff -2\overrightarrow{IM'} = \overrightarrow{IM} \iff \overrightarrow{IM'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{IM}$

donc h : homothétie de centre I et de

rapport $K = -\frac{1}{2}$

2°/a/ $B \in (BC)$ et $h(B) = A$ donc $h((BC))$ = droite qui passe par A

et $\parallel$ à $(BC) = \Delta$

b) $C = (CI) \cap (BC) \Rightarrow h(C) = h((CI)) \cap h((BC)) = (CI) \cap \Delta = C'$

Rq $h((CI)) = (CI)$ car $I \in (CI)$