Lycée Rue Ahmed Amara Le Kef ◈ ◈ ◈ Habib Gammar	Devoir de Contrôle N°3			
	Mathématiques	2e Sc	2020-2021	1 Heure

Exercice 1 (3 points)

- Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
  Indiquer le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
  Aucune justification n'est demandée.

1) Soit la somme $S = 1+2+3+\cdots+1000$ alors :

a) $S = 1006$ **b)** $S = 500500$ **c)** $S = 500000$

2) Soit a, b et c trois termes consécutifs d'une suite géométrique alors :

a) $a \times c = b^2$ **b)** $a \times c = 2b$ **c)** $a + c = b^2$

3) Si B est l'image du point A par l'homothétie de centre I et de rapport -3 alors :

a) $\overrightarrow{IB} = 3\,\overrightarrow{IA}$ **b)** $\overrightarrow{IA} = -3\,\overrightarrow{IB}$ **c)** $\overrightarrow{IB} = -3\,\overrightarrow{IA}$

Exercice 2 (8 points)

Soit (U_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = -6 \\ U_{n+1} = 3U_n - 8 \end{cases}$

1) a) Calculer U_1 et U_2.

b) Justifier que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = U_n - 4$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 3. Préciser son premier terme V_0.

b) Exprimer V_n en fonction de n, En déduire U_n en fonction de n.

3) a) Calculer $S = V_0 + V_1 + \ldots + V_{59}$.

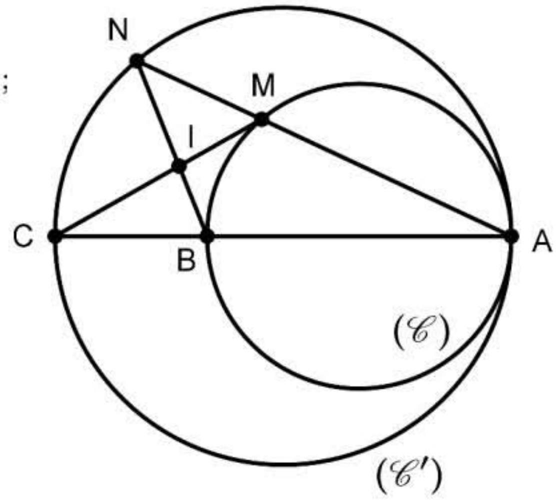
b) Calculer $T = U_0 + U_1 + \ldots + U_{59}$.

c) Soit $R = V_0 \times V_1 \times \cdots \times V_{59}$. Montrer que $R = 30^{60} \times 3^{1710}$.

Exercice 3 (9 points)

Dans la figure ci-contre :

- A, B et C sont trois points du plan tels que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$;
- $(\mathscr{C})$ est le cercle de diamètre $[AB]$;
- $(\mathscr{C}')$ est le cercle de diamètre $[AC]$;
- $M \in (\mathscr{C})$ et (AM) recoupe $(\mathscr{C}')$ en N ;
- Les droites (CM) et (BN) se coupent en I.



1) Soit h l'homothétie de centre A tel que $h(B) = C$.

Montrer que le rapport de h est égal à $\frac{3}{2}$.

2) Prouver que l'image du cercle $(\mathscr{C})$ par l'homothétie h est le cercle $(\mathscr{C}')$.

3) a) Déterminer $h(M)$.

b) En déduire que les droites (BM) et (CN) sont parallèles.

4) Soit h' l'homothétie de centre I tel que $h'(B) = N$.

a) Déterminer l'image de la droite (BM) par l'homothétie h'.

b) En déduire $h'(M)$.

5) Soit G le centre de gravité du triangle ABM.

Déterminer l'ensemble des points G lorsque M varie sur le cercle $(\mathscr{C})$ privé de A et B.

Exercice 1

1) b)

2) a)

3) c)

Exercice 2

(U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = -6 \\ U_{n+1} = 3U_n - 8 \end{cases}$

1) a) • $U_1 = 3U_0 - 8 = 3\times(-6) - 8 = -26$.

• $U_2 = 3U_1 - 8 = 3\times(-26) - 8 = -86$.

1) b) • $\left.\begin{array}{l} U_1 - U_0 = -26-(-6) = -20 \\ U_2 - U_1 = -86-(-26) = -60 \end{array}\right\} \Rightarrow U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$ alors (U_n) n'est pas arithmétique.

• $\left.\begin{array}{l} \dfrac{U_1}{U_0} = \dfrac{-26}{-6} = \dfrac{13}{3} \\ \dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{-86}{-26} = \dfrac{43}{13} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{U_1}{U_0} \neq \dfrac{U_2}{U_1}$ alors (U_n) n'est pas géométrique.

2) (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = U_n - 4$

2) a) • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = U_{n+1} - 4 = 3U_n - 8 - 4 = 3U_n - 12 = 3(U_n - 4) = 3V_n$

alors (V_n) est une suite géométrique de raison 3.

• $V_0 = U_0 - 4 = -6 - 4 = -10$

2) b) • $V_n = V_0 \times q^n = -10\times 3^n$.

• On a $V_n = U_n - 4$ alors $U_n = V_n + 4 = -10\times 3^n + 4$.

3) a) • $S = V_0 + V_1 + \ldots + V_{59} = V_0\left(\dfrac{1-q^{60}}{1-q}\right) = -10\left(\dfrac{1-3^{60}}{1-3}\right) = 5(1-3^{60})$.

3) b) • $T = U_0 + U_1 + \ldots + U_{59} = (V_0+4)+(V_1+4)+\ldots+(V_{59}+4)$.

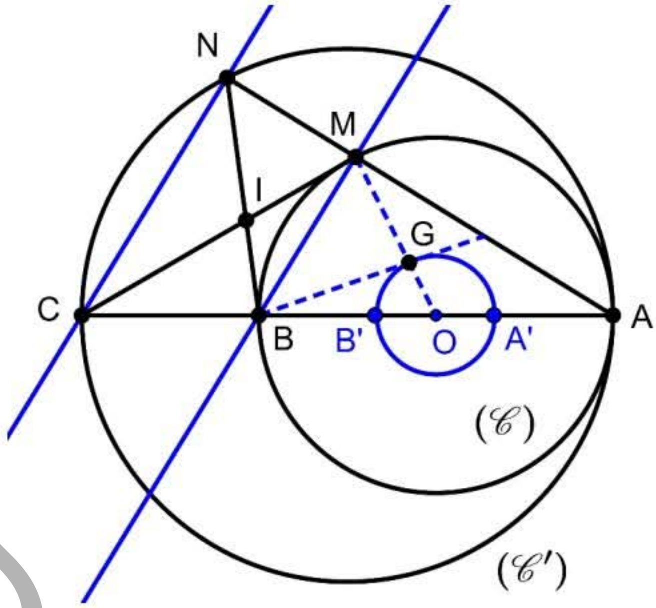
$= \underbrace{V_0 + V_1 + \ldots + V_{59}}_{S} + \underbrace{4+4+\cdots+4}_{60\ fois} = S + 4\times 60 = 5(1-3^{60}) + 240$

3) c) • $R = V_0 \times V_1 \times\cdots\times V_{59} = (-10\times 3^0)\times(-10\times 3^1)\times(-10\times 3^2)\times\cdots\times(-10\times 3^{59})$

$R = \underbrace{(-10)\times(-10)\times\cdots\times(-10)}_{60\ fois}\times 3^{1+2+\cdots+59} = (-10)^{60}\times 3^{\frac{59}{2}(1+59)} = 10^{60}\times 3^{1770}$

$R = 10^{60}\times 3^{60}\times 3^{1710} = 30^{60}\times 3^{1710}$

Exercice 3



h l'homothétie de centre A et de rapport k.

1) On a $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

Comme $h(B) = C \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$ alors le rapport de h est égal à $\frac{3}{2}$.

2) $(\mathscr{C})$ est le cercle de diamètre $[AB]$, comme $h(B) = C$ et $h(A) = A$

alors $h((\mathscr{C}))$ est le cercle de diamètre $[AC]$ d'où $h((\mathscr{C})) = (\mathscr{C}')$.

3) a) On a $M \in (\mathscr{C}) \cap (AM)$ alors $h(M) \in h((\mathscr{C})) \cap h((AM))$ d'où $h(M) \in (\mathscr{C}') \cap (AM) = \{A, N\}$

et comme $h(A) = A$ alors $h(M) = N$.

3) b) On a $\left.\begin{matrix} h(B) = C \\ h(M) = N \end{matrix}\right\}$ alors $\overrightarrow{CN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BM}$ d'où les droites (BM) et (CN) sont parallèles

4) h' l'homothétie de centre I tel que $h'(B) = N$.

4) a) $h'((BM))$ est la droite parallèle à (BM) passant par $h'(B) = N$ alors $h'((BM)) = (CN)$

4) b) On a $\{M\} = (CI) \cap (BM)$ alors $\{h'(M)\} = h'((CI)) \cap h'((BM))$

d'où $\{h'(M)\} = (CI) \cap (CN) = \{C\}$ alors $h'(M) = C$.

5) • Soit $O = A * B$, comme G est le centre de gravité du triangle ABM alors $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OM}$

d'où G est l'image du point M par l'homothétie h_2 de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$.

• Soit $h_2(A) = A'$, $h_2(B) = B'$ et $h_2((\mathscr{C})) = (\mathscr{C}_2)$ alors $(\mathscr{C}_2)$ est le cercle diamètre $[A'B']$

Comme M varie sur le cercle $(\mathscr{C})$ privé de A et B alors G varie sur le cercle $(\mathscr{C}_2)$ privé de A' et B'.