Exercice 1 (6 points)

1. a. Vérifier que $3+2\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^2$

   b. Résoudre dans $[0,\pi]$ l'équation suivante :

   $4\cos^2 x+2(1-\sqrt{2})\cos x-\sqrt{2}=0$

2. Montrer les égalités suivantes :

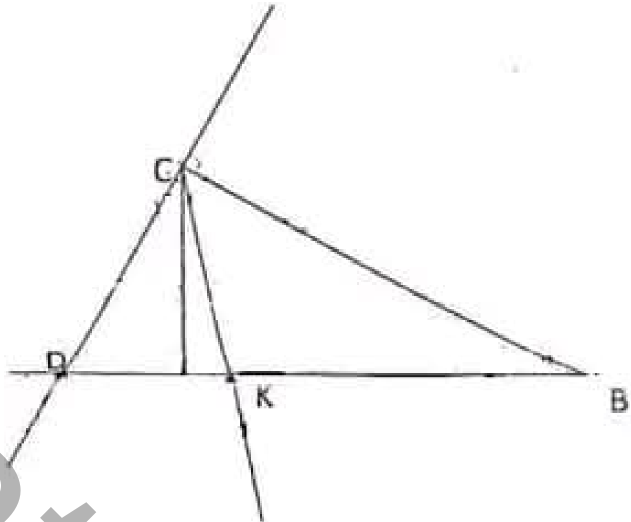
   a. $\cot an^2 x-\tan^2 x=\frac{2\cos^2 x-1}{\cos^2 x-\cos^4 x}$

   b. $3+\cos^2 x=4\cos^2 x+3\sin^2 x$

3. Calculer :

   $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{5\pi}{14}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

Exercice 2 (7 points)



ABC un triangle rectangle en A tel que $AB=3$, $\widehat{ABC}=\frac{\pi}{6}$

1. Calculer AC et BC.

La perpendiculaire à la droite (BC) passant par C coupe la droite (AB) en D

2. Calculer AD et DC

La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BCD}$ coupe (DB) en K

3. Calculer $\frac{KB}{KD}$ et en déduire KB et KD

4. a. Déterminer en radians une mesure de l'angle $\widehat{BKC}$.

   b. En appliquant la loi du sinus dans le triangle BKC , montrer que : $\sin(\widehat{BKC})=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Exercice 3 (7 points)

On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-3}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Parmi ces points citer ceux qui appartiennent à la représentation graphique de f.

$A(0,-\frac{1}{\sqrt{3}})$; $B(-1,-\sqrt{2})$; $C(4,2\sqrt{3})$; $D(5,\sqrt{2})$; $E(1,-1)$

3. Déterminer les éventuels antécédents de 0 et de $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.
4. Montrer que pour tout $x\in\,]3,+\infty[$; $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x-3}}$
5. Vérifier que pour tout $x\neq 3$ on a : $\frac{x-1}{x-3}=1+\frac{2}{x-3}$.
6. Etudier alors les variations de f sur $x\in\,]3,+\infty[$

Correction de devoir de contrôle 4

Exercice 1: 1) a -

$$\begin{aligned} 3+2\sqrt{2} &= \sqrt{2}^{+}2\sqrt{2}+1^2 \\ &= (1+\sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

b - $4\cos^2(x)+2(1-\sqrt{2})\cos(x)-\sqrt{2}=0$
On pose $t=\cos(x)$, on a donc

$$4t^2+2(1-\sqrt{2})t-\sqrt{2}=0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(2(1-\sqrt{2})\right)^2+16\sqrt{2} \\ &= 4(3-2\sqrt{2})+16\sqrt{2} \\ &= 4(3-2\sqrt{2}+4\sqrt{2}) \\ &= 4(3+2\sqrt{2}) \\ &= \left(2(1+\sqrt{2})\right)^2>0 \end{aligned}$$

donc $\sqrt{\Delta}=2(1+\sqrt{2})$ et on a

$$\begin{aligned} t' &= \frac{-2(1-\sqrt{2})+2(1+\sqrt{2})}{8} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} t'' &= \frac{-2(1-\sqrt{2})-2(1+\sqrt{2})}{8} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

alors

$$\cos(x')=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos(x'')=-\frac{1}{2}$$

d'où

$$x'=\frac{\pi}{4} \qquad x''=\frac{2\pi}{3}$$

$$S_{[0;\pi]}=\left\{\frac{\pi}{4};\frac{2\pi}{3}\right\}$$

2) a -

$$\begin{aligned} \cot\mathrm{an}^2(x)-\tan^2(x) &= \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}-\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x)}{1-\cos^2(x)}-\frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^4(x)-\left(1-\cos^2(x)\right)^2}{\cos^2(x)(1-\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cancel{\cos^4(x)}-1+2\cos^2(x)-\cancel{\cos^4(x)}}{\cos^2(x)-\cos^4(x)} \\ &= \frac{2\cos^2(x)-1}{\cos^2(x)-\cos^4(x)} \end{aligned}$$

b -

$$\begin{aligned} 3+\cos^2(x) &= 3\times 1+\cos^2(x) \\ &= 3(\cos^2(x)+\sin^2(x))+\cos^2(x) \\ &= 3\cos^2(x)+3\sin^2(x)+\cos^2(x) \\ &= 4\cos^2(x)+3\sin^2(x) \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{5\pi}{14}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{5\pi}{14}\right)+\frac{1}{2}\\ &= \cancel{\sin\left(\frac{5\pi}{14}\right)}-\cancel{\sin\left(\frac{5\pi}{14}\right)}+\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

<u>**Exercice 2:**</u> 1) Le triangle ABC est rectangle en A, on a donc

$$\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan\left(\widehat{ABC}\right)=\frac{AC}{AB}=\frac{AC}{3}$$

alors, $AC=3\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$
et on a

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\widehat{ABC}\right)=\frac{AB}{BC}=\frac{3}{BC}$$

alors, $BC=\dfrac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$.

2) Le triangle DCB est rectangle en C et $[AC]$ est la hauteur issue de C donc on a,
$AC^2=AD\times AB$ donc $AD=\dfrac{AC^2}{AB}=\dfrac{3}{3}=1$
Alors, $DB=DA+AB=4$ et on a

$$DC\times CB=DB\times AC\Longleftrightarrow DC=\frac{DB\times AC}{BC}=\frac{4\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=2$$

3) Dans le triangle DCB, $[CK)$ est la bissectrice de $\widehat{DCB}$, d'après le théorème de la bissectrice

$$\frac{KB}{KD}=\frac{CB}{CD}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

et on a $KB=DB-KD=-KD$ donc

$$\frac{4-KD}{KD}=\frac{4}{KD}-1=\sqrt{3}\Longleftrightarrow\frac{4}{KD}=\sqrt{3}+1\Longleftrightarrow KD=\frac{4}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}-1$$

alors, $KB=\sqrt{3}KD=3-\sqrt{3}$
4) a - Dans le triangle KCB, ona

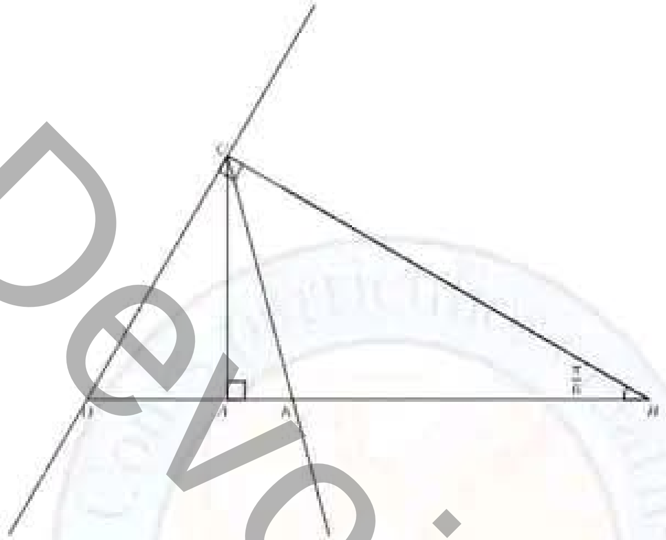
$$\begin{aligned}\widehat{BKC} &= \pi-\left(\widehat{CBK}+\widehat{KCB}\right)\\ &= \pi-\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \pi-\frac{5\pi}{12}\\ &= \frac{7\pi}{12}\end{aligned}$$

b - En appliquant la loi des sinus dans le triangle BKC, ona

$$\frac{\sin\left(\widehat{BKC}\right)}{CB}=\frac{\sin\left(\widehat{BCK}\right)}{KB}$$

donc

$$\begin{aligned}\sin\left(\widehat{BKC}\right) &= CB\times\frac{\sin\left(\widehat{BCK}\right)}{KB}\\ &= 2\sqrt{3}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}\\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$



Exercice 3: 1)

$$\begin{aligned} f \text{ existe} &\Longleftrightarrow x^2-4x+3\geq 0 \text{ et } x-3\neq 0\\ &\Longleftrightarrow x^2-4x+3\geq 0 \text{ et } x\neq 3\end{aligned}$$

On pose $x^2-4x+3=0$, on a $1-4+3=0$ donc $x'=1$ et $x''=3$ donc

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc l'ensemble de définition de f est $]-\infty;1]\cup]3;+\infty[$.

2) $f(0)=-\frac{3}{3}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ donc A appartient à la représentation graphique de f.

$f(-1)=\frac{\sqrt{1+4+3}}{-4}=-\frac{2\sqrt{2}}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\neq-\sqrt{2}$ donc B n'appartient pas à la représentation graphique de f.

$f(4)=\frac{\sqrt{16-20+3}}{2}=\sqrt{3}\neq 2\sqrt{3}$ donc C n'appartient pas à la représentation graphique de f.

$f(5)=\frac{25-20+3}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ donc D appartient à la représentation graphique de f.

$f(1)=\frac{\sqrt{1-4+3}}{-2}=0\neq-1$ donc E n'appartient pas à la représentation graphique de f.

2)

$$\begin{aligned} & f(x)=0\\ \Longleftrightarrow\ & \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-3}=0\\ \Longleftrightarrow\ & \sqrt{x^2-4x+3}=0\\ \Longleftrightarrow\ & x^2-4x+3=0\\ \Longleftrightarrow\ & x=1 \text{ ou } x=3\text{à rejeter car } 3\notin]-\infty;1]\cup]3;+\infty[\end{aligned}$$

Alors, l'antécédent de 0 est 1

$$\begin{aligned}
& f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
\iff & \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-3} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
\iff & \sqrt{2x^2-8x+6} = 3-x
\end{aligned}$$

Si $x \in [3;+\infty[$, $3-x \leq 0$ donc l'équation $\sqrt{2x^2-8x+6} = 3-x$ n'a aucune solution.
Si $x \in]-\infty;3[$, $3-x \geq 0$ or $x \in]-\infty;1] \cup]3;+\infty[$, donc on résout l'équation sur $]-\infty;1]$, on a donc

$$\begin{aligned}
& \sqrt{2x^2-8x+6} = 3-x \\
\iff & 2x^2-8x+6 = (3-x)^2 \\
\iff & 2x^2-8x+6 = x^2-6x+9 \\
\iff & x^2-2x-3 = 0 \text{ on a } 1+2-3=0 \\
\iff & x' = -1 \qquad x'' = 3 \notin]-\infty;1] \text{ à rejeter}
\end{aligned}$$

donc l'antécédent de $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ est -1.

3) Si $x \in]3;\infty[$, $x-3>0$ donc $x-3 = |x-3| = \sqrt{(x-3)^2}$, on a alors,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-3} \\
&= \frac{\sqrt{(x-1)(x-3)}}{\sqrt{(x-3)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(x-1)\cancel{(x-3)}}{(x-3)\cancel{(x-3)}}} \\
&= \sqrt{\frac{x-1}{x-3}}
\end{aligned}$$

4) Pour tout $x \neq 3$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{x-3} &= \frac{x-3+3-1}{x-3} \\
&= \frac{x-3}{x-3} + \frac{2}{x-3} \\
&= 1 + \frac{2}{x-3}
\end{aligned}$$

6) Soient a et b deux réels de $]3;+\infty[$, on suppose que $a \leq b$. Comparons $f(a)$ et $f(b)$.
On a , d'après 5), $f(a) = \sqrt{1+\frac{2}{a-3}}$ et $f(b) = \sqrt{1+\frac{2}{b-3}}$

$$\begin{aligned}
& a \leq b \\
\iff & a-3 \leq b-3 \text{ et les deux réels ont le même signe (positifs)} \\
\iff & \frac{1}{a-3} \geq \frac{1}{b-3} \text{ et } 2>0 \\
\iff & \frac{2}{a-3} \geq \frac{2}{b-3} \\
\iff & 1+\frac{2}{a-3} \geq 1+\frac{2}{b-3} \text{ et les deux réels sont positifs} \\
\iff & \sqrt{1+\frac{2}{a-3}} \geq \sqrt{1+\frac{2}{b-3}} \\
\iff & f(a) \geq f(b)
\end{aligned}$$

Alors, sur $\in]3;+\infty[$, f est décroissante.