Lycée pilote Sousse Date : le 24 / 02 / 2025	Devoir de contrôle N°4 Durée : 1 heure	Prof : Slah Saoudi Classes : 2 sc $_1$ + 2 sc $_2$

Exercice 1 :(7 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 1 - \frac{3}{x^2+1}$. (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1)Etudier la parité de f.

2)a-Déterminer les coordonnées du point A intersection de (C_f) et l'axe des ordonnées.

b-Déterminer les coordonnés des points B et C intersection de (C_f) et l'axe des abscisses.

3) Etudier le sens de variation de f sur chacun des intervalles $[0,+\infty[$ et $]-\infty,0]$.

4)En déduire que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$ que l'on précisera..

Exercice 2 :(7 points)

Soit f une fonction définie sur $]0,+\infty[$ dont la courbe est représentée sur la feuille annexe .

1)a-Déterminer graphiquement $f(1)$ et $f(2)$.

b-Résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = 0$.

2)Soit g la fonction définie par : $g(x) = (x-2)f(x)$. Déterminer le domaine de définition de g.

3)a-Décrire les variations de f.

b-Comparer alors $f(1)$ et $f\left(2-\frac{1}{n}\right)$ où n un entier naturel non nul.

4)On suppose que pour tout réel $x > 0$, $f(x) = a\,x^2 + \frac{b}{x} - 5$ où a et b sont des nombres réels.

Montrer que $a = 1$ et $b = 2$.

5) Soit m un paramètre réel . Déterminer graphiquement et suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation (E_m) : $x^3 - (m+5)x + 2 = 0$.

Exercice 3 : (6 points)

Soit ABC un triangle isocèle -rectangle en A et de sens direct. I est le milieu du segment $[BC]$

On désigne par R la rotation directe de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$. On pose : $D = R(A)$, $E = R(C)$.

1)a- Montrer que les droites (BD) et (AI)sont parallèles.

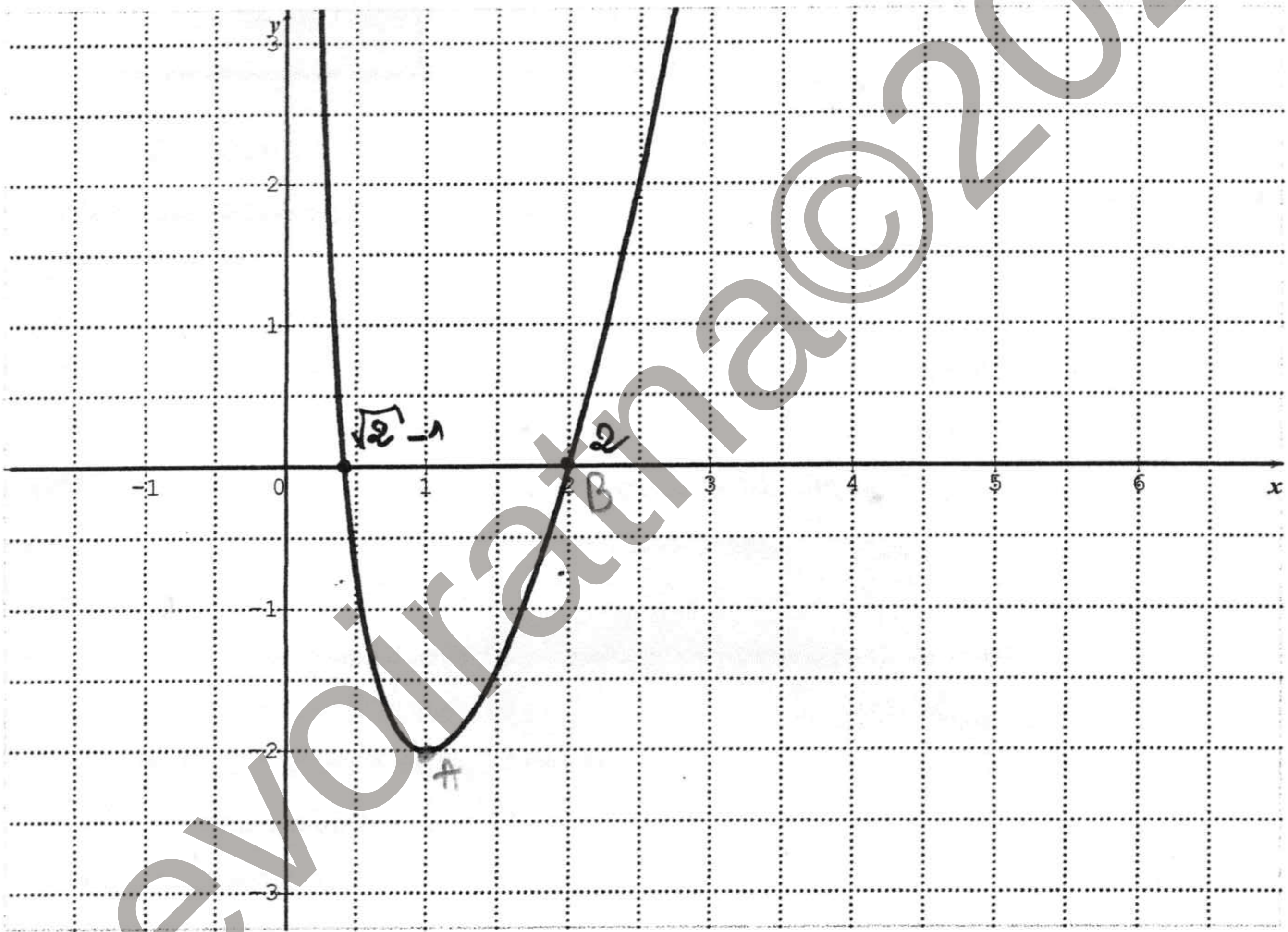
b-Donner la mesure en radians de l'angle géométrique $A\widehat{D}B$.

2) Soit $F = R(I)$. Montrer que le points A , E et F son alignés .

3)Soit S l'aire du quadrilatère $BDEC$. Montrer que $S = AB^2\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$

4) Soit M un point variable de$[AC]$ distinct de A et C . N le point de $[DE]$ tel que $DN = AM$.

Montrer que lorsque M varie , la médiatrice de $[MN]$ passe par un point fixe que l'on précisera.



y
x
0
√2 −1
2
B
A

Ex1:

1) On a $x \in D_f \Rightarrow x \in \mathbb{R}$ donc $-x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in D_f$

On a $f(-x) = (-x)^2 - 1 - \frac{3}{(-x)^2+1} = x^2 - 1 - \frac{3}{x^2+1} = f(x)$

donc f est paire

2) a) $(\mathcal{C}_f) \cap (O, \vec{j}) = \{A(~~\ldots~~, f(0))\}$

$f(0) = 0^2 - 1 - \frac{3}{0^2+1} = -1 - \frac{3}{1} = -4$

$\Rightarrow (\mathcal{C}_f) \cap (O, \vec{j}) = \{A(0;-4)\}$

b) $(\mathcal{C}_f) \cap (O, \vec{i}) = \{B; C\} \Rightarrow f(x) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 1 - \frac{3}{x^2+1} = 0 \Rightarrow (x^2-1)(x^2+1) - 3 = 0$

$\Rightarrow x^4 - 1 - 3 = 0 \Rightarrow x^4 - 4 = 0 \Rightarrow x^4 = 4 \Rightarrow (x^2)^2 = 4$

$\Rightarrow x^2 = 4$ ou $x^2 = -4 \Rightarrow x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

$\Rightarrow (\mathcal{C}_f) \cap (O, \vec{j}) = \{A(\sqrt{2}; 0); B(-\sqrt{2}; 0)\}$

3) Soit $\{a; b\} \in]-\infty; 0]$ tel que $a \leq b \Rightarrow a \leq b \leq 0$

$\Rightarrow a^2 \geq b^2 \Rightarrow a^2 + 1 \geq b^2 + 1 \Rightarrow \frac{1}{a^2+1} \leq \frac{1}{b^2+1}$

$\Rightarrow \frac{-3}{a^2+1} \geq \frac{-3}{b^2+1} \Rightarrow -1 - \frac{3}{a^2+1} \geq -1 - \frac{3}{b^2+1}$

et $a^2 \geq b^2 \Rightarrow a^2 - 1 - \frac{3}{a^2+1} \geq b^2 - 1 - \frac{3}{b^2+1}$

$\Rightarrow f(a) \geq f(b) \Rightarrow f$ est décroissante sur $]-\infty; 0]$

f est paire donc $f(-a) = f(a)$ et $f(b) = f(-b)$

$a \leq b \leq 0 \Rightarrow -a \geq -b \geq 0$ et $f(a) \geq f(b) \Rightarrow f(-a) \geq f(-b)$

$\Rightarrow f$ est croissante sur $[0; +\infty[$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	

donc f admet un minimum en 0 de valeur $f(0) = -4$

Ex2:

1) a) $A(1; -2) \in \mathcal{C}_f \Rightarrow f(1) = -2$

$B(2; 0) \in \mathcal{C}_f \Rightarrow f(2) = 0$

b) $f(x) = 0$ donc les solutions sont l'ensemble des abscisses des points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et $(O, \vec{i}) \Rightarrow S_{\mathbb{R}} = \{2; \sqrt{2} - 1\}$

2) $g(x) = (x-2)f(x)$ existe $\Leftrightarrow x \in D_f \Rightarrow x \in]0;+\infty[$

$$D_g = D_f =]0;+\infty[$$

3) a) On a graphiquement

f est décroissante sur $]0; \sqrt{2}-1]$

f est croissante sur $[\sqrt{2}-1; 1]$

f est décroissante sur $[1; 2]$

f est croissante sur $[2; +\infty[$

b) ~~Enn~~

4) $f(1) = -2 \Rightarrow a + b - 5 = -2$ (1)

$f(2) = 0 \Rightarrow 4a + \frac{b}{2} - 5 = 0 \Rightarrow 8a + b - 10 = 0$ (2)

$\Rightarrow$ (1) $-$ (2) $\Rightarrow a + b - 5 - 8a - b + 10 = -2$

$\Rightarrow -7a + 5 = -2 \Rightarrow \cancel{-24a = -2}$

$\Rightarrow -7a = \frac{-2-5}{-7} = \frac{-7}{-7} = 1$

(1) $\Rightarrow a + b - 5 = -2 \Rightarrow 1 + b - 5 = -2$

$\Rightarrow 1 + b = 3 \Rightarrow b = 2$

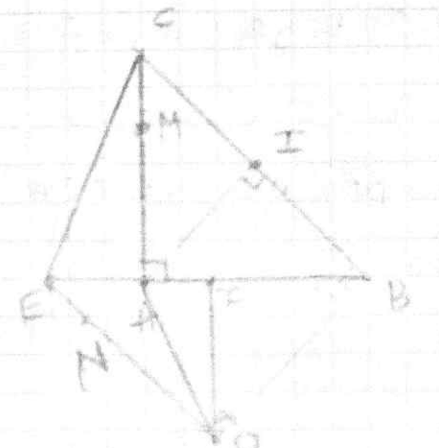
5) $(E_m) : x^3 - (m+5)x + 2 = 0$

$\Rightarrow x^3 - mx - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x^3 - 5x + 2 = mx$

$\Rightarrow \frac{x^3 - 5x + 2}{x} = m \Rightarrow f(x) = m$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f	0 solutions	1 solution	2 solutions

Ex3 :



1)a) On a $R_{(B;\frac{\pi}{4})}(A) = D \Rightarrow A\hat{B}D = \frac{\pi}{4}$

ABC triangle rectangle-isocèle en $A \Rightarrow A\hat{B}C = \frac{\pi}{4}$ $\Big\} \Rightarrow C\hat{B}D = A\hat{B}D + A\hat{B}C = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow (BD) \perp (BC)$ ①

$I = B * C$ donc $[AI]$ médiane issue de A

$\Rightarrow [AI]$ hauteur issue de $A \Rightarrow (AI) \perp (BC)$ ②

① + ② $\Rightarrow (AI) \parallel (BD)$

b) $R_{(B;\frac{\pi}{4})}(A) = D \Rightarrow BA = BD$ et $A\hat{B}D = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow A\hat{D}B = \frac{\pi - A\hat{B}D}{2} = \frac{\pi - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{3\pi}{8}$

2) On a $R(I) = F$
$R(C) = E$ $\Rightarrow I = B * C \Rightarrow r(I) = r(B) * r(C)$
$R(B) = B$ $\Rightarrow F = B * E \Rightarrow F \in (BE)$ ①

$R(C) = E \Rightarrow C\hat{B}E = \frac{\pi}{4}$ et on a $A\hat{B}C = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow B; A; E$ sont alignés $\Longrightarrow A \in (BE)$ ②

① + ② $\Rightarrow A; E; F$ sont alignés

4) On a $R(C) = E$
soit $R(M) = M'$ $\Big\}$ $CM = EM'$ ①

$M \in [AC] \Rightarrow R(M) \in R([AC])$
$M' \in [DE]$. ②

et $DN = AM$
$N \in [DE]$ $\Longrightarrow R(M) = N$

1) $BM = BN \Rightarrow$ méd $[MN]$ passe par B.

3) On a $R(A) = D$
$R(C) = E$ ACI triangle rectangle-isocèle en I
$R(I) = F \Rightarrow BEF$ rectangle-isocèle en F

$\Rightarrow (DF) \perp (BE)$ ~~en~~ le milieu de $[BE]$

$\Rightarrow (DF)$ méd $[BE] \Rightarrow DB = DE$ et $D\hat{E}B = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow E\hat{D}B = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow (ED) \perp (DB)$

$\Rightarrow EDBC$ trapèze

$R($

$AB = EE$ $\quad \begin{cases} R(C) = E \\ R(A) = D \end{cases}$

$AB = AC = DE$

(BDE) $\quad \frac{\cancel{2}AB^2}{\cancel{2}} = AB^2$

$\cancel{AB}$ $\quad \cancel{\frac{BE \times AB}{2}}$

$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{2}\,AB$

$\boxed{BC = AB\sqrt{2}}$

$\frac{(BC + DE) \times BD}{2}$

$\frac{(AB\sqrt{2} + AB) \times AB}{2}$

$\frac{AB^2 + AB\sqrt{2}}{2} = AB^2\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$