Lycée Pilote de Sfax	Devoir de contrôle N 6	Classe : 2SC3
Le 16 / 05 / 2014	Mathématiques	Durée : 1 heure

Exercice 1 : (4points) Q- C- M.

1) Soit la droite Δ d'équation : $y = 2x - 1$ et (C) le cercle de centre I(-2 ; 1) de rayon $\sqrt{5}$.
Alors Δ et (C) sont :

a) tangent b) sécants c) extérieurs

2) Soit la droite Δ d'équation : $3x - 4y + 1 = 0$ et (C) le cercle de centre I (-1 ; 2) et tangent à la droite Δ . Alors une équation de (C) est :

a) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 2$ b) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ c) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$

3) L'ensemble des points M(x ; y) du plan tel que : $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 20 = 0$ est :

a) Un cercle b) Un point c) l'ensemble vide

4) $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan
(C) le cercle d'équation : $x^2 + y^2 = 4$ et h l'homothétie de centre O de rapport $(\frac{-1}{2})$. Le cercle (C') image de (C) par h à pour équation :

a) $x^2 + y^2 = 2$ b) $x^2 + y^2 = 4$ c) $x^2 + y^2 = 1$

Exercice 2 :(8points)

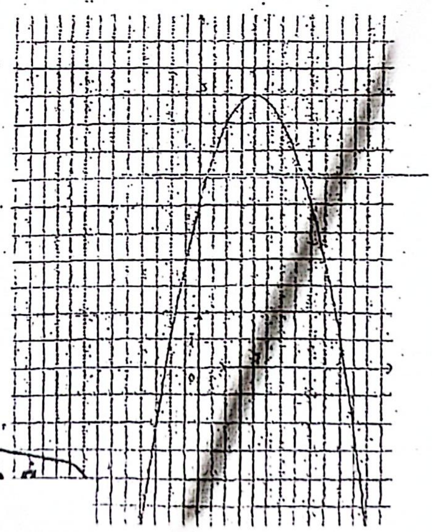
Soit $(O ; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé du plan et A, B, C les points définis comme suit :La droite (AB) à pour équation réduite : $y = x + 3$, la droite (AC) à pour équation : $x + 2y + 6 = 0$ et les points B et C ont respectivement pour ordonnées 5 et (- 4)

1) Déterminer les coordonnées des points A, B et C

2) Soit (C) le cercle de centre O et tangent à la droite (AB)
   a) Donner une équation cartésienne de (C)
   b) Montrer que la droite (BC) et le cercle (C) sont sécants puis déterminer les coordonnées de leurs points d'intersection

3) Soit $\vec{u}$ un vecteur colinéaire à $\vec{i}$ et de même sens que $\vec{i}$ et (C') l'image de (C) par la translation de vecteur $\vec{u}$.
Déterminer les composantes du vecteur $\vec{u}$ pour que le cercle (C') soit tangent à la droite (BC)

Exercice 3 : :(8points)



La parabole P donnée ci contre représente une fonction f et d'équation $y = ax^2 + bx + c$

1) Utiliser le graphique pour déterminer le signe des réels a, b et c

2) Quelles sont les coordonnées du sommet de P
   Quel est l'axe de la parabole?

3) Montrez que $f(x) = -0,5x^2 + 2x + 3$

4) Soit g la fonction définie sur IR par:
$g(x) = -0,5x^2 + 2|x| + 3$

a)Tracer Cg la courbe de g à partir de P

b) Résoudre graphiquement : $xg(x) < 0$

L.P.F.H Sfax — Devoir de Contrôle N°6 — 2SC3

16/05/2014

Exercice 1 : (Q-C-M)

1) b)

2) b)

3) b)

4) c)

Exercice 2 :

1) $B \in (AB)$ et $y_B = 5$ Donc $y_B = x_B + 3$ d'où $B(2 ; 5)$

$C \in (AC)$ et $y_C = -4$ Donc $x_C + 2y_C + 6 = 0$ d'où $C(2 ; -4)$

$A \in (AB) \cap (AC)$ équivaut $\begin{cases} y_A = x_A + 3 \\ x_A + 2y_A + 6 = 0 \end{cases}$ équivaut $\begin{cases} y_A = -1 \\ x_A = -4 \end{cases}$ Donc $A(-4 ; -1)$

2) a) (C) cercle de centre O et tangent à (AB)

Or $(AB) : x - y + 3 = 0$ Donc $R_C = d(O,(AB)) = \frac{3}{\sqrt{2}}$

D'où $(C) : x^2 + y^2 = \frac{9}{2}$

b) $\vec{BC}\begin{pmatrix} 0 \\ -9 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (BC)

d'où $(BC) : -9x + 0y + c = 0$; $(c \in \mathbb{R})$

$B(2,5) \in (BC)$ donc $c = 18$ par suite $(BC) : x - 2 = 0$

Autrement : $x_B = x_C = 2$ donc $(BC) : x = 2$

c) $d(O;(BC)) = \frac{|0-2|}{\sqrt{1^2+0^2}} = 2 < R_{(C)}$

Donc (C) et (BC) sont sécants.

d) $M(x,y) \in (C) \cap (BC)$ équivaut $\begin{cases} x = 2 \\ x^2 + y^2 = \frac{9}{2} \end{cases}$ équivaut $\begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Donc $(C) \cap (BC) = \left\{ E\left(2; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), F\left(2; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}$

3) $\vec{u}$ est un vecteur colinéaire à $\vec{i}$ et de même sens que $\vec{i}$

Donc $\vec{u} = \alpha \vec{i}$ tel que $\alpha > 0$

(C') est l'image de (C) par $t_{\vec{u}}$ Donc $R_{(C')} = R_{(C)}$

et $O' = t_{\vec{u}}(O)$ est le centre de (C')

$\vec{OO'} = \vec{u}$ donc $O'(\alpha, 0)$

(C') tangent à (BC) équivaut $d(O',(BC)) = R_{(C)}$

équivaut $\frac{|\alpha - 2|}{\sqrt{1^2+0^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

éq à : $\alpha - 2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ou $\alpha - 2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$

éq à : $\alpha = 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ou $\alpha = 2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Or $\alpha > 0$ Donc $\alpha = 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$ et $I\left(2+\frac{3\sqrt{2}}{2} ; 0\right)$

Exercice 3 :

1) ~~La parabole P représente la fonction f~~

. La parabole P d'équation $y = ax^2 + bx + c$ représente une fonction f donc $f(x) = ax^2 + bx + c$.

P coupe la droite des abscisses en deux points distincts d'abscisses $x_1 < 0$ et $x_2 > 0$

Donc le trinôme f admet deux racines distinctes

Puisque P est au dessous de $(0, \vec{i})$ sur $]x_1 ; x_2[$

Donc $a < 0$

D'autre part $x_1 x_2 < 0$ Donc $\frac{c}{a} < 0$ d'où $c > 0$, $(a < 0)$

D'après le graphique $|x_1| < x_2$ Donc $x_2 + x_1 > 0$ d'où $\frac{-b}{a} > 0$

Par suite $b > 0$. Conclusion $a < 0$; $b > 0$ et $c > 0$

2) Par lecture graphique $S(2 ; 5)$ est le sommet de P

et $\Delta : x = 2$ est l'axe de symétrie de P.

3) $S(2 ; 5)$ est le sommet de P donc

$f(x) = a(x-2)^2 + 5$

le point $A(0 ; 3) \in P$

Donc $3 = a(0-2)^2 + 5$ d'où

Il vient que $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 5$

Par suite $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$.

4) a) •) $D_g = \mathbb{R}$

. Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $(-x) \in \mathbb{R}$ et $g(-x) = g(x)$; $(|-x| = |x|)$

Donc g est une fonction paire.

•) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = f(x)$; $(|x| = x$, $x > 0)$

Soit P_1 la partie de P relative à $\mathbb{R}_+$

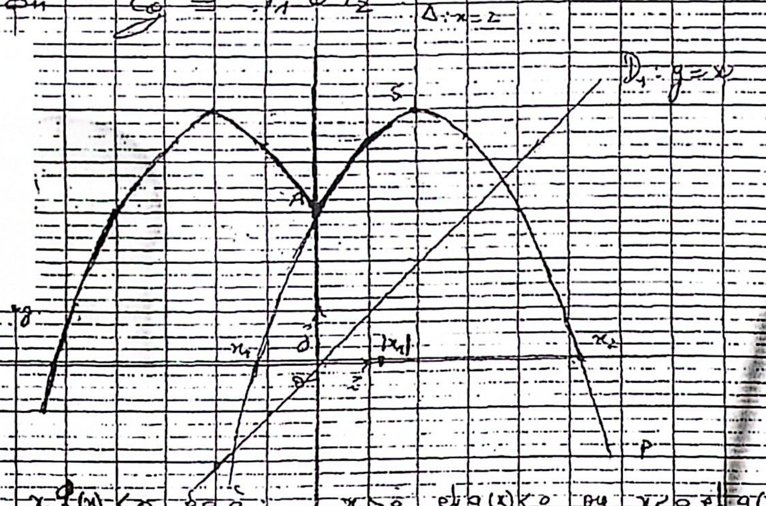
Donc P_1 est aussi la partie de C_g relative à $\mathbb{R}_+$

Du fait que g est une fonction paire

Alors C_g est symétrique par rapport à $(O, \vec{j})$

Donc $P_2 = S_{(O,\vec{j})}(P_1)$ est la partie de C_g relative à $\mathbb{R}^-$

Conclusion $C_g = P_1 \cup P_2$



c) 1ère Méthode : $x\,g(x) < 0$ équivaut à : $x > 0$ et $g(x) < 0$ ou $x < 0$ et $g(x) > 0$

- Les solutions de $g(x) < 0$ et $x > 0$ sont les abscisses strictement positives des points de C_g situés au dessous de $(O,\vec{i})$ donc $S_1 =]x_2 ; +\infty[$
- Les solutions de $g(x) > 0$ et $x < 0$ sont les abscisses strictement négatifs des points de C_g situés au dessus de $(O,\vec{i})$ donc $S_2 =]x_1 ; 0[$.

cl : $S_{\mathbb{R}} =]x_1 ; 0[\cup]x_2 ; +\infty[$
$=]2-\sqrt{10} ; 0[\cup]2+\sqrt{10} ; +\infty[$

$f(x) = 0$
$\Delta = 40$
$x_1 = 2-\sqrt{10}$ et $x_2 = 2+\sqrt{10}$

2ème Méthode : soit D la droite d'équation $y = x$.

« c'est la représentation graphique de la fonction $x \mapsto x$

Les solutions de $x\,g(x) < 0$ sont les abscisses communes des points M et N situés l'un sur D_1 l'autre sur C_g et d'ordonnées de signe différent $(y_M \cdot y_N < 0)$

donc $S_{\mathbb{R}} =]x_1 ; 0[\cup]x_2 ; +\infty[$