Lycée pilote Sfax Le 10 -05 -2012	Devoir de contrôle N°6	2ème Sc 3,4,6,8 et 9 Mmes. : Fehri et Tounsi, Mr : Smaoui

Exercice 1 (11 points)

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{4}x^2-x$. $(\mathscr{C})$ désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Vérifier que, pour tout réel x, $f(x)=\frac{1}{4}(x-2)^2-1$.

b) Construire $(\mathscr{C})$.

2) Soit $A(2,0)$ et soit Δ la droite d'équation $y=-2$.

Soit M un point variable sur Δ. La médiatrice du segment $[AM]$ coupe la parallèle à $(O,\vec{j})$ passant par M en un point N.

a) Montrer que $N\in(\mathscr{C})$.

b) Déduire graphiquement l'abscisse du point M pour la quelle l'ordonné de N est minimal.

3) Soit $K(6,3)$.

a) Vérifier que $K\in(\mathscr{C})$.

b) Soit (Γ) le cercle de centre K et passant par A. Montrer que la droite Δ est tangente à Γ.

4) a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec la droite $D: y=x-2$.

b) Résoudre graphiquement l'inéquation, $\frac{1}{4}x^2-2x+2\geq 0$.

Exercice 2 (9 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère le point $A(2+4\sqrt{2},0)$ et l'ensemble $\mathscr{C}$ des points $M(x,y)$ vérifiants $x^2+y^2+4x+4y+4=0$.

1) Montrer que $\mathscr{C}$ est un cercle dont on précisera le centre I et le rayon R.

2) La droite D d'équation $y=x-2$ coupe $\mathscr{C}$ en deux points E et F. $(x_E<x_F)$.

a) Déterminer les coordonnées de E et de F.

b) Déterminer une équation de la droite Δ tangente au cercle $\mathscr{C}$ au point E.

3) Soit $\mathscr{C}'$ le cercle de centre A et tangent à la droite D.

a) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{C}'$.

b) Montrer que Δ est tangente à $\mathscr{C}'$.

L.P.F.H Sfax — Devoir de Contrôle N°6 — 2 Sc 3-4-6-8-9

10/05/2012

Exercice 1 :

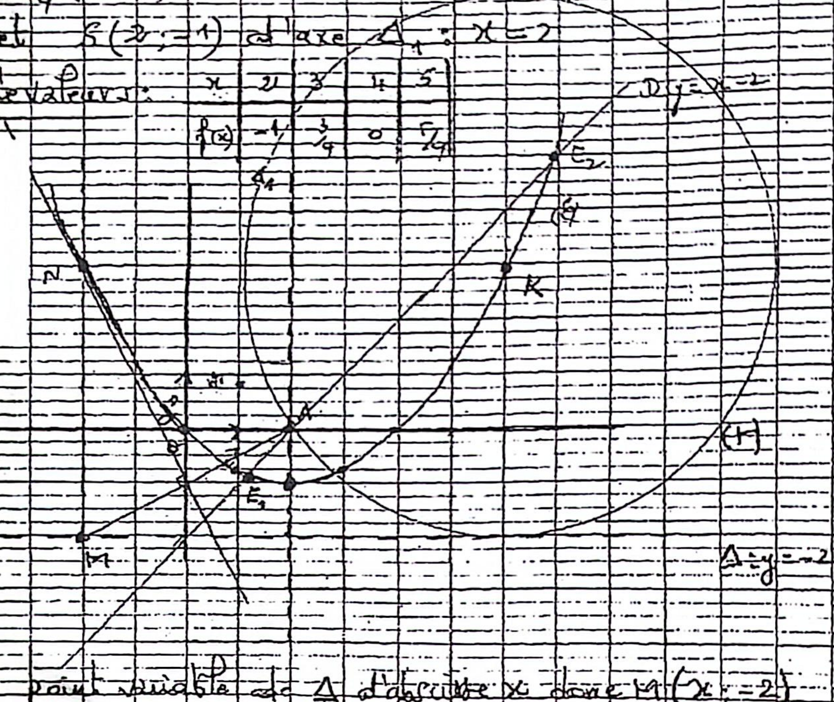
1) a) Soit $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{4}(x-2)^2 - 1 = \frac{1}{4}x^2 - x = f(x)$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 1$

b) $f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 1$ donc $(\mathcal{C})$ est une parabole de sommet $S(2\,;-1)$ d'axe $\Delta_1 : x = 2$

Tableau de valeurs :

x	2	3	4	5
$f(x)$	-1	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{5}{4}$



2) a) M un point variable de Δ d'abscisse x donc $M(x\,;-2)$

$(NM) \parallel (O, \vec{j})$ donc $x_N = x_M = x$ d'où $N(x\,; y_N)$

N appartient à la médiatrice de $[AM]$

$NA = NM$

$(2-x)^2 + (0-y_N)^2 = (x-x)^2 + (-2-y_N)^2$

$y_N = \frac{1}{4}x^2 - x$ donc $N \in \mathcal{C}$ $\left(\begin{array}{l} N(x\,; y_N) \\ \mathcal{C} : y = f(x) \end{array}\right)$

b) N est un point variable de la parabole $(\mathcal{C})$ donc y_N est minimal lorsque N est confondu au le sommet de $(\mathcal{C})$ $S(2\,,-1)$ donc $y_N = -1$ et $x_N = 2$

Comme M et N ont de même abscisse alors $x_M = 2$.

3) a) $f(x_K) = f(6) = 3 = y_K$ donc $K \in (\mathcal{C})$.

b) $K(6\,;3)$ et $A(2\,,0)$ donc $AK = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

(Γ) est le cercle de centre K passant par A donc $R_{(\Gamma)} = 5 = AK$

$d(K\,;\Delta) = \frac{|y_K + 2|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 5 = R_{(\Gamma)}$ donc Δ est tangente à (Γ)

$\Delta : y = -2$ équivaut à : $\Delta : 0x + y + 2 = 0$

Bel Mode di Vivere

4) a) $E(x,y)\in(\mathcal{C})\cap\mathcal{D}$ équivaut à : $\begin{cases} y=f(x)\\ y=x-2\end{cases}$ équivaut $\begin{cases} f(x)=x-2\\ y=x-2\end{cases}$

Résolvons l'équation $f(x)=x-2$

$\frac{1}{4}x^2-x=x-2$

$x^2-8x+8=0$

$\Delta=32>0$; $x=4-2\sqrt{2}$ ou $x=4+2\sqrt{2}$

Si $x=4-2\sqrt{2}$ Alors $y=2-2\sqrt{2}$

Si $x=4+2\sqrt{2}$ Alors $y=2+2\sqrt{2}$

Donc $(\mathcal{C})\cap\mathcal{D}=\{E_1(4-2\sqrt{2},\ 2-2\sqrt{2});\ E_2(4+2\sqrt{2},\ 2+2\sqrt{2})\}$

b) $\frac{1}{4}x^2-2x+2\geq 0$ équivaut $\frac{1}{4}x^2-x\geq x-2$

équivaut $f(x)\geq y_{\mathcal{D}}$. $(\mathcal{D}: y=x-2)$

Les solutions de l'inéquation $\frac{1}{4}x^2-2x+2\geq 0$ sont les abscisses des points de $(\mathcal{C})$ situés sur ou au dessus de la droite $\mathcal{D}$.

c) Construisons la droite $\mathcal{D}$; $\mathcal{D}$

x	0	2
y	-2	0

Alors on déduit que

$S=]-\infty;x_{E_1}]\cup[x_{E_2};+\infty[\ =\ ]-\infty;4-2\sqrt{2}]\cup[4+2\sqrt{2};+\infty[$

Exercice N°2 :

1) $M(x,y)\in\mathcal{C}$ équivaut : $x^2+y^2+4x+4y+4=0$

équivaut : $(x+2)^2+(y+2)^2=4$

Donc $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $I(-2,-2)$ de rayon $R=2$

2) a) $N(x,y)\in\mathcal{C}\cap D$ équivaut : $\begin{cases} y=x-2\\ (x+2)^2+(y+2)^2=4\end{cases}$ équivaut $\begin{cases} y=x-2\\ (x+2)^2+x^2=4\end{cases}$

équivaut $\begin{cases} y=x-2\\ 2x^2+4x=0\end{cases}$ équivaut $\begin{cases} y=x-2\\ x=0 \text{ ou } x=-2\end{cases}$ équivaut $\begin{cases} y=-2\\ x=0\end{cases}$ ou $\begin{cases} y=-4\\ x=-2\end{cases}$

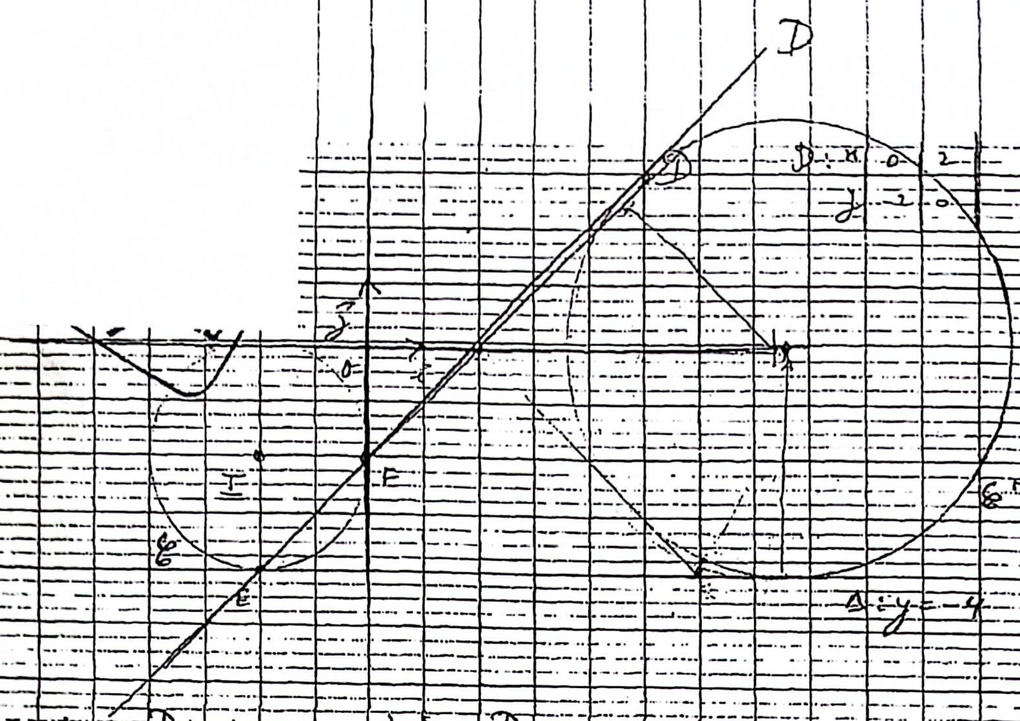
Comme $x_E<x_F$ Alors $x_E=-2$ et $x_F=0$

D'où $D\cap\mathcal{C}=\{E(-2;-4);\ F(0;-2)\}$

b) Δ tangente à $\mathcal{C}$ en E donc $\vec{IE}\binom{0}{-2}$ est un vecteur normal à Δ, (I centre de $\mathcal{C}$)

d'où Δ : $0x-2y+c=0$; $c\in\mathbb{R}$

Comme $E\in\Delta$ donc Δ : $y=-4$



3) a) $\mathcal{D} : y = x - 2$ càd $\mathcal{D} : x - y - 2 = 0$

$\mathscr{C}'$ de centre A et tangent à $\mathcal{D}$ donc $R_{\mathscr{C}'} = d(A, \mathcal{D}) = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4$

d'où $\mathscr{C}' : (x - 2 - 4\sqrt{2})^2 + y^2 = 16$

b) $\Delta : y = -4$ càd $\Delta : 0x + y + 4 = 0$

$d(A, \Delta) = \frac{|0 + 0 + 4|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 4 = R_{\mathscr{C}'}$

Donc Δ est tangente à $\mathscr{C}'$.