Lycée Pilote Sfax Mrs : Abdelmoula et Jarraya Mmes : Fakhri et Tounsi	Devoir de contrôle n°6 Mathématiques Durée : 1heure	$2^{ème}$ SC 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 Date : 13/05/2013

Exercice N°1 : (9,5 points)

Soit f la fonction définie par f(x)= $-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$

1) a) vérifier que tout rée x ; f(x) = $-\frac{1}{2}(x-1)^2+2$

b) Construire dans un repère orthonormée $(O,\vec{i},\vec{j})$; C_f la courbe représentative de f.

2) Soit D la droite d'équation 2x + y - 6 = 0

a) Déterminer les coordonnées du point A intersection de C_f et D

b) Résoudre graphiquement dans IR, l'inéquation $\frac{1}{2}x^2-3x \succ -\frac{9}{2}$

3) Soit la fonction g définie par g(x) = $\frac{1}{2}x^2-|x|-\frac{3}{2}$

a) Etudier la parité de g

b) Vérifier pour tout $x\in IR^+$, g(x) = - f(x)

c) Construire à partir de C_f la courbe C_g de g dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4) Soit le point E $(1,\frac{3}{2})$, Δ la droite d'équation y = $\frac{5}{2}$, M un point de la courbe C_f d'abscisse t (t∈IR) et K le projeté orthogonal de M sur Δ . Montrer que M est équidistant des points E et K .

Exercice N°2 : (10,5 points)

$(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormée du plan on donne les points A (-3,-1) ; B(2,4) ; C (3,-1) et H (2,0).

1) Vérifier que H est l'orthocentre du triangle ABC.
2) On désigne par ζ le cercle circonscrit au triangle ABC.
   Ecrire une équation cartésienne de ζ (on note I son centre)
3) a) Déterminer les cordonnées du point G centre de gravité du triangle ABC.
   b) Vérifier que les points I, G et H sont situées sur une même droite Δ .
4) a) Déterminer les cordonnée du point K projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
   b) Déterminer les cordonnées du point D image de H par la symétrie orthogonale d'axe (AB).
   c) Vérifier que D appartient au cercle ζ
5) Ecrire les équations des droites perpendiculaires à (AB) et tangentes au cercle ζ

L.P.F.H Sfax — Devoir de contrôle N°6 — 13/05/2013

2sc 1-2-3-4-5-6-7-8

Exercice 1 :

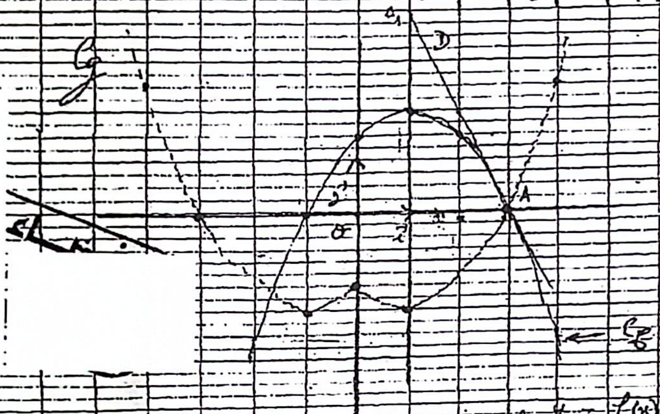
1) a) Soit $x \in \mathbb{R}$, $-\frac{1}{2}(x-1)^2+2 = -\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2} = f(x)$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2+2$.

b) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2+2$ Donc $\mathcal{C}_f$ est une parabole de sommet $S(1;2)$ d'axe de symétrie $\Delta_1 : x = 1$

Tableau de valeurs :

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	6



2) a) $A(x;y) \in \mathcal{C}_f \cap D$ équivaut $\begin{cases} y = f(x) \\ 2x+y-6=0 \end{cases}$ équivaut $\begin{cases} y = f(x) \\ 2x+f(x)-6=0 \end{cases}$

Soit l'équation $2x+f(x)-6=0$

$2x-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}-6=0$

$-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{9}{2}=0$ équivaut $(x-3)^2=0$ équivaut $x=3$

Comme $y=f(x)$ Donc $y=f(3)=0$ d'où $A(3;0)$

b) $\frac{1}{2}x^2-3x > -\frac{9}{2}$ équivaut $-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2} < -2x+6$

équivaut $f(x) < y_D$

Donc les solutions de l'inéquation $\frac{1}{2}x^2-3x > -\frac{9}{2}$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés au-dessous de D

d'où $S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\setminus\{3\}$

3) a) $D_g = \mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $(-x) \in \mathbb{R}$ et $g(-x) = \frac{1}{2}(-x)^2-|-x|-\frac{3}{2} = g(x)$

Donc la fonction g est paire.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$; (car $|x|=x$)

$= -\left(-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}\right) = -f(x)$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = -f(x)$

c) Soit C_1 la partie de C_g correspondante à $\mathbb{R}_+$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = -f(x)$ Alors $C_1' = S_{(O,\vec{i})}(C_1)$

la partie de C_g correspondante à $\mathbb{R}_+$

D'autre part g est une fonction paire, alors

la courbe C_g est symétrique par rapport à $(O,\vec{j})$

d'où $C_2 = S_{(O,\vec{j})}(C_1')$ est la partie de C_g relative à $\mathbb{R}_-$

Par suite $C_g = C_1' \cup C_2$ (voir figure)

4) $\Delta : y = \frac{5}{2}$ équivaut à $\Delta : 2y - 5 = 0$

$M \in C_g$ et $x_M = t$ Donc $y_M = f(t)$ d'où $M(t, f(t))$

K projeté orthogonal de M sur Δ équivaut à $MK = d(M, \Delta)$

équivaut à $MK = \frac{|2f(t) - 5|}{\sqrt{0^2 + 2^2}}$

$$ME^2 - MK^2 = (1-t)^2 + \left(f(t) - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{(2f(t) - 5)^2}{4}$$

$$= (1-t)^2 + f^2(t) - 3f(t) + \frac{9}{4} - f^2(t) + 5f(t) - \frac{25}{4}$$

$$= (1-t)^2 + 2f(t) - 4 = (1-t)^2 - (t-1)^2 + 4 - 4 = 0$$

Donc $ME^2 - MK^2 = 0$ Alors $ME = MK$

Par suite tout point de C_g est équidistant de E et K.

Exercice 2 :

1) $\vec{AH}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{BC}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$ donc $5 \times 1 + 1 \times (-5) = 0$ d'où $\vec{AH} \perp \vec{BC}$.

$\vec{BH}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$ donc $0 \times 6 + (-2) \times 0 = 0$ d'où $\vec{BH} \perp \vec{AC}$

et comme $(AH) \cap (BH) = \{H\}$ Donc H est l'orthocentre de ABC

($\vec{AH}$ et $\vec{BH}$ non colinéaires).

2) $x_A = -x_C$ Donc A et C sont symétriques par rapport à $(O,\vec{j}) : x = 0$.

Soit Δ_1 la médiatrice de $[BC]$.

$\vec{BC}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Δ_1 d'où $\Delta_1 : x - 5y + c = 0$; $(c \in \mathbb{R})$

Le point I milieu de $[BC]$ appartient à Δ_1 et $I\left(\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right)$

Donc $\frac{1}{2} - 5 \times \frac{3}{2} + c = 0$ Donc $c = 7$ Par suite $\Delta_1 : x - 5y + 7 = 0$

I centre de $(\mathscr{C})$ Donc $IA = IC$ et $IB = IC$

d'où $I \in (O,\vec{j}) \cap \Delta_1$ Alors $\begin{cases} a = 0 \\ a - 5b + 5 = 0 \end{cases}$

d'où $\begin{cases} b = 1 \\ a = 0 \end{cases}$ Donc $I(0 ; 1)$

Aussi $\mathscr{C} : x^2 + (y-1)^2 = R^2$; $R^2 = IA^2 = 13$

$\mathscr{C} : x^2 + (y-1)^2 = 13$

3) G centre de gravité de ABC donc $\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$

$G\left(\frac{2}{3} ; \frac{2}{3}\right)$

b) $I(0;1)$, $G\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$ et $H(2;0)$

Donc $\vec{IG}\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ et $\vec{IH}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ d'où $\vec{IG} = \frac{1}{3}\vec{IH}$

Ensuite I, G et H appartiennent à une même droite Δ.

4) a) $K(x;y)$ le projeté orthogonal de C sur (AB)

$\vec{CK}\begin{pmatrix} x-3 \\ y+1 \end{pmatrix}$; $\vec{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\vec{AK}\begin{pmatrix} x+3 \\ y+1 \end{pmatrix}$

équivaut : $\begin{cases} \vec{CK} \perp \vec{AB} \\ \vec{AK} \text{ et } \vec{AB} \text{ colinéaires} \end{cases}$ équivaut : $\begin{cases} 5(x-3) + 5(y+1) = 0 \\ 5(x+3) - 5(y+1) = 0 \end{cases}$

équivaut : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ Donc $K(0;2)$

b) (AB) médiatrice de $[HD]$ équivaut K milieu de $[HD]$, $\begin{cases} (CH) \perp (AB) \text{ et } (HD) \perp (AB) \\ (CK) \perp (AB) ; K \in (AB) \end{cases}$

équivaut : $\begin{cases} x_K = \frac{x_H + x_D}{2} \\ y_K = \frac{y_H + y_D}{2} \end{cases}$ équivaut : $\begin{cases} x_D = -2 \\ y_D = 4 \end{cases}$ Donc $D(-2;4)$

c) $ID = \sqrt{(x_D - x_I)^2 + (y_D - y_I)^2}$
$= \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} = R_{\mathscr{C}}$ donc $D \in \mathscr{C}$

5) Soit (δ) une droite perpendiculaire à (AB)

donc $\vec{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (δ) d'où $\delta : x + y + c = 0$ $(c \in \mathbb{R})$

(δ) tangente à $\mathscr{C}$ équivaut $d(I ; \delta) = \sqrt{13}$

équivaut $\frac{|1 + c|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{13}$

équivaut $|1 + c| = \sqrt{26}$ équivaut $c = \sqrt{26} - 1$ ou $c = -\sqrt{26} - 1$

Donc $(\delta_1) : x + y + \sqrt{26} - 1 = 0$ et $(\delta_2) : x + y - \sqrt{26} - 1 = 0$

Sont les équations cartésiennes des droites perpendiculaires à (AB) et tangentes à $\mathscr{C}$