Lycée Pilote de Sousse Clas58 059 2975-6	Devoir deControleN°6 Mathématiques Prof : Chokri Lassoued	Durée : [illegible]heures

Exercice1 :(10points)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x}{x+2}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a/ Déterminer D_f ensemble de définition de f et vérifier que $f(x) = 1 - \frac{2}{x+2}$

b/ Etudier les variations de f sur $]-2; +\infty[$

c/ Préciser les coordonnées de W centre de l'hyperbole (C_f) et les équations de ses asymptotes

d/ Donner l'équation de (C_f) dans le repère $(W, \vec{i}, \vec{j})$, puis tracer (C_f)

2) On pose $g(x) = \frac{|x|}{|x|-2}$, on désigne par (C_g) sa représentation graphique dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a/ Déterminer D_g ensemble de définition de g

b/ Montrer que g est paire.

c/ Vérifier que pour tout $x \in]-\infty; 0[\setminus\{-2\}$ on a ; $g(x) = f(x)$

d/ Tracer (C_g) en utilisant (C_f)

e/ Donner le tableau de variation de g

3) Déterminer l'ensemble de paramètre réel m pour que $g(x) = m$ admet exactement 2 solutions

Exercice 2 :(10points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.Soit les points $A(-3,4)$, $F(-2,2)$, $I(2,4)$ et $J(4,0)$

1)a/ Ecrire une équation cartésienne de la droite $\Delta = (AF)$

b/ Montrer que $d(I, \Delta) = IJ$

2)a/ Ecrire une équation du cercle C de centre I et passant par J

b/ Justifier que Δ est tangente à C puis déterminer le point de contacte

3)a/ Ecrire une équation de la droite Δ' médiatrice de $[FJ]$

b/ Déterminer le point K intersection de Δ et Δ' et vérifier que $FIJK$ est un carré.

c/ Déduire (sans déterminer les équations cartésiennes) les tangentes à C issues de K.

4) Soit $C' = \{M(x,y) \in P \text{ tel que } MF^2 + MJ^2 = 40\}$.

a/ Montrer que qu'une équation de C' est $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$

b/ Montrer que C' est le cercle circonscrit au carré $FIJK$.

Lycée pilote de Sousse
58 059 297

Correction du devoir de contrôle N°6
Mathématiques

Exercice 1 :

$f(x) = \frac{x}{x+2}$

1) a/ f existe si et seulement si $x+2 \neq 0$
$\Rightarrow x \neq -2$ donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$f(x) = \frac{x}{x+2} = \frac{x+2-2}{x+2}$

$= \frac{x+2}{x+2} - \frac{2}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2}$

b/ f est dérivable sur $]-2, +\infty[$
et on a : pour $x \in]-2, +\infty[$
soient a et b $\in]-2, +\infty[$ tq $a < b$
$f(b) - f(a) = 1 - \frac{2}{b+2} - \left(1 - \frac{2}{a+2}\right) = \frac{2}{a+2} - \frac{2}{b+2}$
$= \frac{2b-2a}{(a+2)(b+2)} > 0 \Rightarrow f(b) > f(a)$
donc f est croissante sur $]-2, +\infty[$

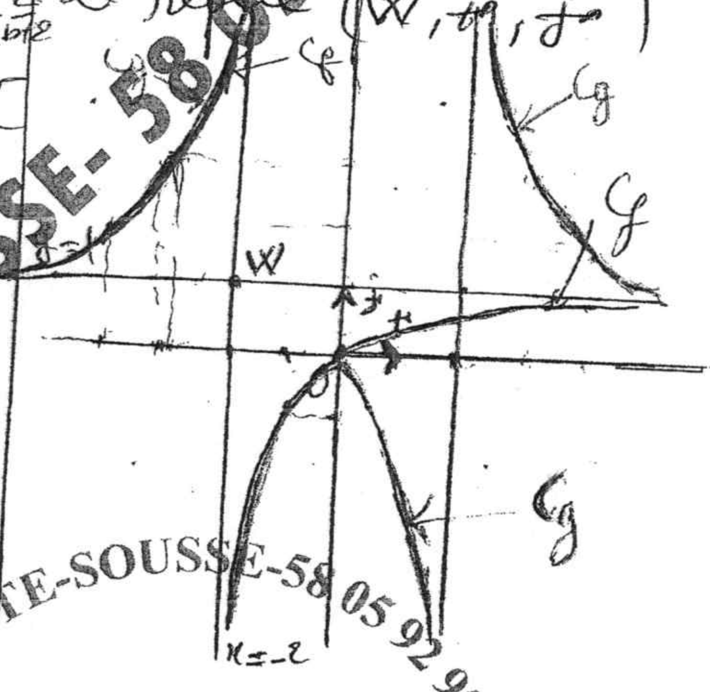
c/ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$
est une asymptote horizontale à C_f et la droite d'équation
$x = -2$ est une asymptote verticale à C_f
d'où le centre $W(-2, 1)$

si $M(X, Y) \in C_f$ dans le repère $(W, \vec{i}, \vec{j})$ et $M(x,y)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$
$\Rightarrow \overrightarrow{WM} = X\vec{i} + Y\vec{j}$
$\overrightarrow{WM} = \overrightarrow{WO} + \overrightarrow{OM}$
$= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x\vec{i} + y\vec{j}$
$= (2 + x)\vec{i} + (y-1)\vec{j}$

$\Rightarrow \begin{cases} X = 2 + x \\ Y = y - 1 \end{cases}$

$Y = f(x) - 1$
$= 1 - \frac{2}{x+2} - 1 = -\frac{2}{x+2}$
$= -\frac{2}{X}$

$\Rightarrow C_f : Y = -\frac{2}{X}$ dans le repère $(W, \vec{i}, \vec{j})$



2) $g(x) = \frac{|x|}{|x|-2}$

a/ g existe si $|x| - 2 \neq 0$
$\Rightarrow |x| \neq 2 \Rightarrow x \neq 2$ et -2
$\Rightarrow D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

b/ si $x \in D_g$, $-x \in D_g$ car D_g est symétrique.

$g(-x) = \frac{|-x|}{|-x|-2} = \frac{|x|}{|x|-2} = g(x)$

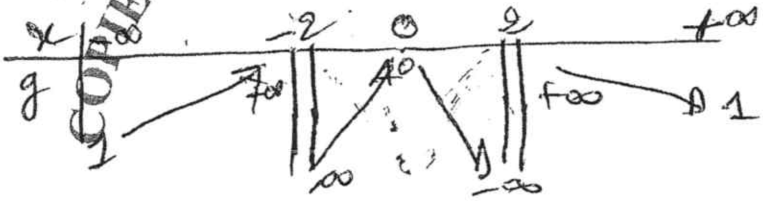
$\Rightarrow$ g est paire.

si $x \in]-\infty, 0[\setminus \{-2\} \Rightarrow |x| = -x$

$\Rightarrow g(x) = \frac{-x}{-x-2} = \frac{-x}{-(x+2)} = \frac{x}{x+2} = f(x)$

1/ traçage de C_g en utilisant (C_f)

2/



$\lim_{x \to -2^-} g(x) = \lim_{x \to -2^-} 1 - \frac{2}{x+2} = +\infty$ $\quad \lim_{x \to -2^+} g(x) = \lim_{x \to -2^+} 1 - \frac{2}{x+2} = -\infty$

$\lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x}{x-2} = -\infty$ $\quad \lim_{x \to 2^+} g(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x}{x-2} = +\infty$

3/ $g(x) = m$ admet exactement 2 solutions $\Rightarrow$

$m \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

Exercice 2 : $A(-3,4)$, $F(-2,2)$, $I(2,4)$ et $J(4,0)$

1/a/ $\Delta = (AF)$

$\Delta : y = ax + b$

$A \in \Delta \Rightarrow 4 = -3a + b$

$F \in \Delta \Rightarrow 2 = -2a + b$ $\Rightarrow \begin{cases} -3a + b = 4 \\ -2a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a + 2a + 2 = 4 \\ b = 2 + 2a \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -a = 2 \\ b = 2 + 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \end{cases}$ donc $\boxed{\Delta : y = -2x - 2}$

b/ $d(I, \Delta) = \frac{|-2 \times 2 - 4 - 2|}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$

$IJ = \sqrt{(4-2)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$

donc $d(I, \Delta) = IJ$.

2/a/ C est de centre I et passant par J $\Rightarrow C(I, IJ)$

$\Rightarrow (C) : (x-2)^2 + (y-4)^2 = (2\sqrt{5})^2 = 20$

$\Rightarrow (AB) : y = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$

c) $(C_m) : x^2 + y^2 - 2(3m-1)x - 2(2m+3)y + 6m + 10 = 0$

$x^2 - 2(3m-1)x + (3m-1)^2 - (3m-1)^2 +$
$y^2 - 2(2m+3)y + (2m+3)^2 - (2m+3)^2 + 6m + 10 = 0$

$\Rightarrow (x-(3m-1))^2 + (y-(2m+3))^2 - (3m-1)^2 - (2m+3)^2 + 6m + 10 = 0$

$\Rightarrow$
$(x-(3m-1))^2 + (y-(2m+3))^2 = 9m^2 - 6m + 1 + 4m^2 + 12m + 9 - 6m - 10$

$\Rightarrow (x-(3m-1))^2 + (y-(2m+3))^2 = 13m^2 = (m\sqrt{13})^2$

(C_m) est un cercle pour tout $m \in \mathbb{R}^*$

donc $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$I_m(3m-1, 2m+3)$ est le centre de (C_m).

$R_m = m\sqrt{13}$ est le rayon de (C_m)

$2m + 3 = \frac{2}{3}(3m-1) + 5$

donc $I_m \in$ à la droite d'équation $y = \frac{2}{3}x + 5$

si $m \in (E)$ $(d) = \{(x,y) / y = \frac{2x}{3} + 5\}$

- $\forall m \in E$ on a :

$(-1-(3m-1))^2 + (3-(2m+3))^2 = 13m^2$

c-à-d pour tout $m \in E$

$(-1, 3) \in (C_m)$

donc tous les cercles (C_m) passent par le point $(-1, 3)$.