Lycée pilote de Sousse
Date : Le 11 – 05 - 2022

Devoir de Contrôle N°6

Mathématiques

Classes :2 Sc
Durée : 1 heure

Exercice 1 :(12 points)

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$. On désigne par (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a-Quel est le domaine de définition de f ? .

b- Etudier le sens de variation de f sur $]-\infty, -2[$.

2) Déterminer les coordonnées des points d'intersection A et B de (C_f) et la droite Δ: $y = -x + 4$

3)a- Déterminer la nature de (C_f) , son centre de symétrie et ses asymptotes .

b - Tracer sur la feuille ci – jointe la courbe (C_f) et la droite Δ .

c- Résoudre graphiquement l'inéquation (I) : $\frac{5}{x+2} \geq x - 2$.

4)Soit la fonction g définie par : $g(x) = \frac{2|x|+1}{|x|-2}$.

a-Justifier que la droite des ordonnées est un axe de symétrie de la courbe de g.

b-Tracer la courbe de g à partir de (C_f).

Exercice 2 :(8 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, On considère l'ensemble (C) des points $M(x, y)$ tels que $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 16 = 0$.

1)Montrer que (C) est un cercle dont on précisera le centre I et le rayon R.

2)Soient les points $A(-1, 3)$ et $B(5, 7)$.

a- Montrer que $[AB]$ est un diamètre de (C).

b- Soit Δ la droite dont une équation cartésienne $3x + 2y - 3 = 0$.

Montrer que Δ est la tangente à (C) en A.

c-Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

3) On considère l'ensemble (C_m) des points $M(x, y)$ tels que :

$x^2 + y^2 - 2(3m - 1)x - 2(2m + 3)y + 6m + 10 = 0$. (m étant un nombre réel)

a- Déterminer l'ensemble (E) des valeurs de m tels que (C_m) est un cercle.
Préciser dans ce cas le centre I_m et la rayon R_m de (C_m).

b-Déterminer l'ensemble (d) des points I_m lorsque m varie dans l'ensemble (E).

b- Montrer que tous les cercles (C_m) passent par un point fixe que l'on déterminera.

Lycée pilote de Sousse

Le 11-05-2022

Correction du devoir de contrôle N°6 Mathématiques

Classes : 2S

Exercice 1 :

$f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$

1) a- f existe si $x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

b- $f(x) = \frac{2x+4-5}{x+2}$

$= \frac{2x+4}{x+2} - \frac{5}{x+2}$

$= \frac{2(x+2)}{x+2} - \frac{5}{x+2}$

$= 2 - \frac{5}{x+2}$

soient $a, b \in]-\infty, -2[$ tq $a < b$

$f(b) - f(a) = 2 - \frac{5}{b+2} - (2 - \frac{5}{a+2})$

$= \frac{5(b+2) - 5(a+2)}{(a+2)(b+2)} = \frac{5(b-a)}{(a+2)(b+2)} \geq 0$

$\Rightarrow f$ est croissante sur $]-\infty, -2[$

$M(x,y) \in C_f \cap \Delta \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y = 2 - \frac{5}{x+2} \\ y = -x+4 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -x+4 = 2 - \frac{5}{x+2} \\ y = -x+4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+2 = -\frac{5}{x+2} \\ y = -x+4 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (-x+2)(x+2) = -5 \\ y = -x+4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x^2 = -5 \\ y = -x+4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y = -x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ ou } -3 \\ y = -x+4 \end{cases}$

pour $x = 3$, $y = 1$

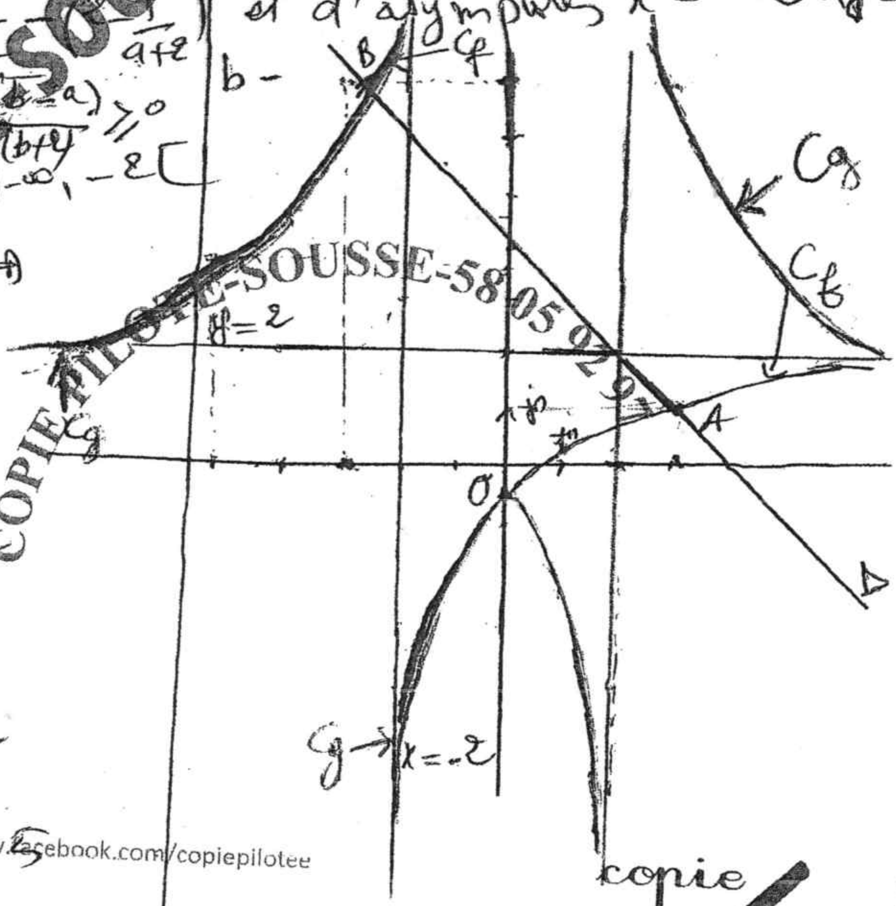
pour $x = -3$, $y = 7$

donc $A(3, 1)$ et $B(-3, 7)$.

3) a- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 2$

donc (C_f) est une hyperbole de centre de symétrie $I(-2, 2)$ et d'asymptotes $x = -2$ et $y = 2$

b-



c- $(I) : \frac{5}{x+2} \geq x-2$

$\frac{5}{x+2} \geq x-2$

$\Rightarrow -\frac{5}{x+2} \leq 2-x$

$\Rightarrow 2 - \frac{5}{x+2} \leq 4-x$

$\Rightarrow$ C_f est au dessous de Δ

$\Rightarrow x \in]-\infty, -3] \cup]-2, 3]$

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty, -3] \cup]-2, 3]$.

) $g(x) = \frac{2|x|+1}{|x|-2}$

a- $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

si $x \in D_g$ $-x \in D_g$ car D_g est symétrique

$g(-x) = \frac{2|-x|+1}{|-x|-2} = \frac{2|x|+1}{|x|-2} = g(x)$

$\Rightarrow$ g est paire

$\Rightarrow$ la droite des ordonnées est un axe de symétrie de la courbe C_g de g.

- traçage de C_g.

Exercice 2 :

$(C) : x^2 + y^2 - 4x - 10y + 16 = 0$

$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 - 10y + 25 - 25 + 16 = 0$

$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-5)^2 = (\sqrt{13})^2$

(2)

$\Rightarrow (C) : (x-2)^2 + (y-5)^2 = \ldots$

$\Rightarrow$ (C) est le cercle de centre $I(2, 5)$ et de rayon $\sqrt{13}$

2) $A(-1, 3)$ et $B(5, 7)$

$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = (2, 5)$

$\Rightarrow I = A * B$

$\Rightarrow [AB]$ est un diamètre de (C).

b- $\Delta : 3x + 2y - 3 = 0$

$3 \times (-1) + 2 \times 3 - 3 = 0$

$\Rightarrow A \in \Delta$

$\overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AI}$ est le vecteur normal à Δ c-à-d $(AI) \perp \Delta$

donc Δ est la tangente à (C) en A.

c- $(AB) : y = ax + b$

$A \in (AB) \Rightarrow 3 = -a + b$

$B \in (AB) \Rightarrow 7 = 5a + b$

$\Rightarrow \begin{cases} -a + b = 3 \\ 5a + b = 7 \end{cases}$

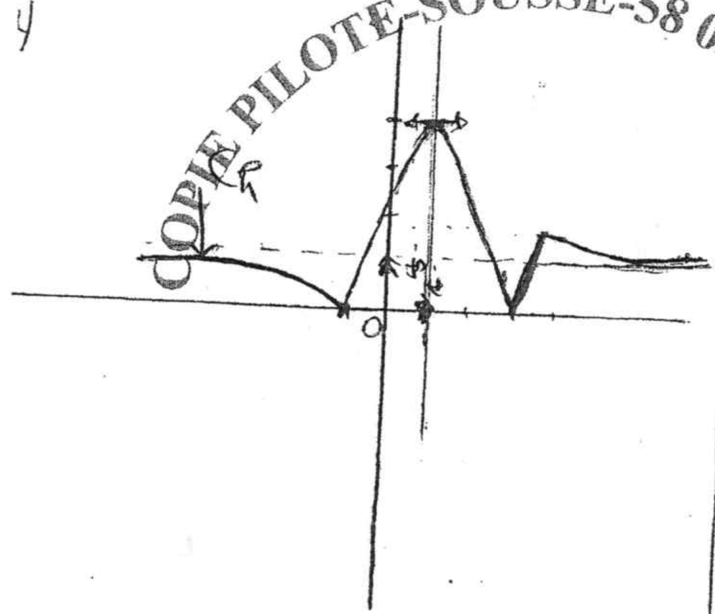
$\Rightarrow \begin{cases} b = a + 3 \\ 5a + a + 3 = 7 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} b = a + 3 \\ 6a + 3 = 7 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} b = a + 3 \\ 6a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = a + 3 \\ a = 2/3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} b = 11/3 \\ a = 2/3 \end{cases}$

$$x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]-\infty,-1] \cup [2+\sqrt{2}, +\infty[\\ -f(x) & \text{si } x \in [-1,3] \\ f(x) & \text{si } x \in [3, 2+\sqrt{2}] \end{cases}$$



x	$-\infty$	-1	1	3	$2+\sqrt{2}$	
h	1 ↘	0 ↗	4 ↘	0 ↗	$2\sqrt{2}-1$ ↘	1

$h(2+\sqrt{2}) = (2+\sqrt{2}-1)^2 - 4$
$= (1+\sqrt{2})^2 - 4 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 4$
$= 2\sqrt{2} - 1$

$P \in]0, 2\sqrt{2}-1] \cup [5/2, 4[$

Exercice n°3 : $A(4,-2)$, $B(2,4)$

$\mathcal{C}$ est de centre $K = A*B$
et de rayon $\frac{AB}{2}$

$K\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$; $K(3,1)$

$AB = \sqrt{(2-4)^2 + (4-(-2))^2}$
$= \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ (3)

donc $\mathcal{C}(K, \sqrt{10})$

$(\mathcal{C}) : (x-3)^2 + (y-1)^2 = 10$

2) a) D médiatrice de $[OA]$

$M(x,y) \in D$

$\Rightarrow OM = AM$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y+2)^2}$

$\Rightarrow x^2+y^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y + 4$

$\Rightarrow -8x + 4y + 20 = 0$

$\Rightarrow \boxed{D : -2x + y + 5 = 0}$

b) $M(x,y) \in D \cap (\mathcal{C})$

$\Rightarrow \begin{cases} -2x + y + 5 = 0 \\ (x-3)^2 + (y-1)^2 = 10 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x-5 \\ (x-3)^2 + (2x-5-1)^2 = 10 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x-5 \\ x^2 - 6x + 9 + 4x^2 - 24x + 36 = 10 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x-5 \\ 5x^2 - 30x + 35 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x-5 \\ x^2 - 6x + 7 = 0 \end{cases}$

$\Delta' = (-3)^2 - 7 = 2$

$x_1 = 3 - \sqrt{2}$ et $x_2 = 3$

donc $E(x_1, y_1)$ et $F(x_2, y_2)$ sont les points d'intersection de D et (C)

$y_1 = 2x_1 - 5 = 2(3-\sqrt{2}) - 5$

$= 1 - 2\sqrt{2}$

$y_2 = 2x_2 - 5 = 2(3+\sqrt{2}) - 5$

$= 1 + 2\sqrt{2}$

$E(3-\sqrt{2}, 1-2\sqrt{2})$ et $F(3+\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2})$

3) a) $(C') : x^2+y^2+4x-2y-15=0$

$x^2+y^2+4x-2y-15 = x^2+4x+4-4$
$+y^2-2y+1-1-15$

$\Rightarrow x^2+y^2+4x-2y-15 = (x+2)^2+(y-1)^2-20$

donc $(C') : (x+2)^2+(y-1)^2-20=0$

$\Rightarrow (C') : (x+2)^2+(y-1)^2 = (\sqrt{20})^2$
$= (2\sqrt{5})^2$

donc (C') est un cercle de centre $I(-2, 1)$ et de rayon $R = 2\sqrt{5}$

) $d(I, D) = \dfrac{|-2(-2)+1+5|}{\sqrt{(-2)^2+1^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{5}}$

$= 2\dfrac{5}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} = R$

donc D et (C') sont tangents

) $M(x,y) \in (C) \cap (C')$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2+(y-1)^2 = 10 \\ (x+2)^2+(y-1)^2 = 20 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2+(y-1)^2 = 10 \\ (x+2)^2-(x-3)^2 = 10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2+(y-1)^2 = 10 \\ x^2+4x+4-x^2+6x-9 = 10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2+(y-1)^2 = 10 \\ 10x = 15 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (-\frac{3}{2})^2+(y-1)^2 = 10 \\ x = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-1)^2 = 10 - 9/4 \\ x = 3/2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-1)^2 = \frac{31}{4} \\ x = 3/2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |y-1| = \frac{\sqrt{31}}{2} \\ x = 3/2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y-1 = \frac{\sqrt{31}}{2} \text{ ou } -\frac{\sqrt{31}}{2} \\ x = 3/2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1+\frac{\sqrt{31}}{2} \text{ ou } 1-\frac{\sqrt{31}}{2} \\ x = 3/2 \end{cases}$

donc (C) et (C') sont sécants en $P(3/2, 1+\frac{\sqrt{31}}{2})$ et $Q(\frac{3}{2}, 1-\frac{\sqrt{31}}{2})$

c) Si $H = (C') \cap D$

$\Rightarrow IH$ est la hauteur de IEF

donc l'aire du triangle IEF

est $\mathcal{A}(IEF) = \frac{EF \times IH}{2} = \frac{EF \times R}{2}$

$= \frac{\sqrt{(3+\sqrt{2}-3+\sqrt{2})^2+(1+2\sqrt{2}-1+2\sqrt{2})^2} \times 2\sqrt{5}}{2}$

$= \sqrt{8+32} \times \sqrt{5} = \sqrt{40} \times \sqrt{5}$

$= \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

4/ $D_m : x + (1-m)y + 3 = 0$

$d(K, D_m) = \frac{|3+(1-m)\times 1+3|}{\sqrt{1^2+(1-m)^2}}$

$= \frac{|7-m|}{\sqrt{2-2m+m^2}}$

$= \sqrt{\frac{(7-m)^2}{2-2m+m^2}}$

Comparons $d(K, D_m)$ et $\sqrt{10}$

c-à-d comparons $\frac{(7-m)^2}{2-2m+m^2}$ et 10

$10 - \frac{(7-m)^2}{2-2m+m^2} = \frac{20-20m+10m^2-(49-14m+m^2)}{2-2m+m^2}$

$= \frac{9m^2-6m-29}{1+(1-m)^2}$

$\Delta' = (-3)^2 + 9 \times 29 = 9 \times 30 > 0$

donc $m_1 = \frac{3-3\sqrt{30}}{9} = \frac{1-\sqrt{30}}{3}$

$m_2 = \frac{1+\sqrt{30}}{3}$

m	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{30}}{3}$		$\frac{1+\sqrt{30}}{3}$		$+\infty$
$9m^2-6m-29$		+	0	−	0	+	

donc si $m = \frac{1-\sqrt{30}}{3}$ ou $\frac{1+\sqrt{30}}{3}$

D_m et (C) sont tangents

si $m \in \left]-\infty, \frac{1-\sqrt{30}}{3}\right[\cup \left]\frac{1+\sqrt{30}}{3}, +\infty\right[$

D_m et (C) sont sécants

si $m \in \left]\frac{1-\sqrt{30}}{3}, \frac{1+\sqrt{30}}{3}\right[$

D_m et (C) sont disjoints

$(D_m \cap (C) = \emptyset)$.

5) a)

$(C_m) : x^2 + y^2 + 2mx + 2y + m^2 + 4m - 3 = 0$

$(C_m) : (x+m)^2 + (y+1)^2 + 4m - 4 = 0$

si $m < 1$

$(C_m) : (x+m)^2 + (y+1)^2 = (\sqrt{2(1-m)})^2$

(C_m) est le cercle de centre $(-m, -1)$ et de rayon $2(1-m)$

si $m = 1$

C_m est le point $(-1, -1)$

si $m > 1$, $C_m = \emptyset$

b) si C_m est un cercle

$M(x,y) \in C_m \cap C$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + (y-1)^2 = 10 \\ (x+m)^2 + (y+1)^2 = 4(1-m) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-6x+9+y^2-2y+1=10 \\ x^2+2mx+m^2+y^2+2y+1=4(1-m) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2m+6)x - 9 + m^2 + 4y = 4(1-m)-10$$

$$\Rightarrow (2m+6)x + 4y = 4(1-m) + 1 - m^2 = 5 - m - m^2$$

$$y = \frac{5-m-m^2-(2m+6)x}{4}$$

d'où $(x-3)^2 + \left(\frac{5-m-m^2-(2m+6)x}{4} - 1\right)^2 = 10$

$$\Rightarrow (x-3)^2 + \left[\frac{-(1+m+m^2)-(2m+6)x}{4}\right]^2 = 10$$

$$\Rightarrow x^2-6x+9+\frac{\left((2m+6)x+(1+m+m^2)\right)^2}{16} = 10$$

$$\Rightarrow x^2-6x+\frac{\left[(2m+6)x+(1+m+m^2)\right]^2}{16} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 16x^2-96x+(2m+6)^2x^2+2(2m+6)(1+m+m^2)x+(1+m+m^2)^2-16=0$$

$$\Rightarrow \left[16+(2m+6)^2\right]x^2 + 2\left[(2m+6)(1+m+m^2)-48\right]x + \left[1+m+m^2\right]^2-16=0$$

$$\Delta' = \left[(2m+6)(1+m+m^2)-48\right]^2 - \left[16+(2m+6)^2\right]\left[\left[1+m+m^2\right]^2-16\right]$$

$$= \left[(2m+6)^2(1+m+m^2)^2 - 2\times 48(2m+6)(1+m+m^2)+48^2\right] - \left[16\left[1+m+m^2\right]^2 - 16^2 + (2m+6)^2(1+m+m^2)^2 - (2m+6)^2\times 16\right]$$

$$= -96(2m+6)(1+m+m^2)+48^2-16(1+m+m^2)^2+16^2+16(2m+6)^2$$

Si $\Delta' < 0$, pas de solution $C_m \cap C = \emptyset$

si $\Delta' = 0$ une seule solution C_m et C sont tangents

si $\Delta' > 0$ 2 solutions C_m et C sont sécants.

2) $C_{-1} : (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$

$M(x,y) \in C_{-1} \cap D \iff \begin{cases} (x-1)^2+(y+1)^2=4 \\ y = 2x-5 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-1)^2+(2x-4)^2=4 \\ y=2x-5 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 5x^2-18x+13=0 \\ \ldots \end{cases}$ $\Delta = 81-60 = 21$ donc $x_1 = \frac{9+\sqrt{21}}{5}$, $x_2 = \frac{9-\sqrt{21}}{5}$