3

LYCEE PILOTE –SFAX	DEVOIR DE CONTROLE N°6 DE MATHEMATIQUES	Mme MEGDICH
2éme sc 9 – 10	1h	13/05/2013

EXERCICE N°1(10points) 19 4

Soient f et g les fonctions définies sur IR par : $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}$ et $g(x) = \frac{-1}{2}(x+2)^2 + \frac{7}{2}$

On désigne par Cf et Cg leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1/ Tracer Cf

2/ Soit D la droite de coefficient directeur (-1) et passant par le point E de C f d'abscisse (-3)

a- Ecrire l'équation réduite de D puis tracer D

b- Résoudre graphiquement dans IR l'inéquation : $f(x) \leq -x+3$

3/ a- Tracer Cg

b- Calculer les antécédents de 0 par g

c- Résoudre graphiquement dans IR l'inéquation : $f(x) . g(x) \succ 0$

4/ Soient F(0,2) , Δ : y = 1 et M(x,y) un point du plan tel que MF = d(M, Δ). Montrer que M $\in$ Cf

EXERCICE N°2(10points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ on donne les points A(3,1) et B(1,-3)

1/ Ecrire l'équation du cercle ζ de diamètre $[AB]$, on note I son centre

2/a- Vérifier que $O \in \zeta$

b- Ecrire une équation cartésienne de la tangente D à ζ au point O

3/ Soit Δ : x-3y-10 =0

a- Montrer que Δ coupe ζ en deux points puis calculer les coordonnées de ces points : on désigne par C le point d'abscisse supérieure à 1

b- Montrer que les points O , I et C sont alignés

4/ Soit $\zeta' = \{M(x,y)\ tel\ que\ x^2+y^2+6x-3y=0\}$

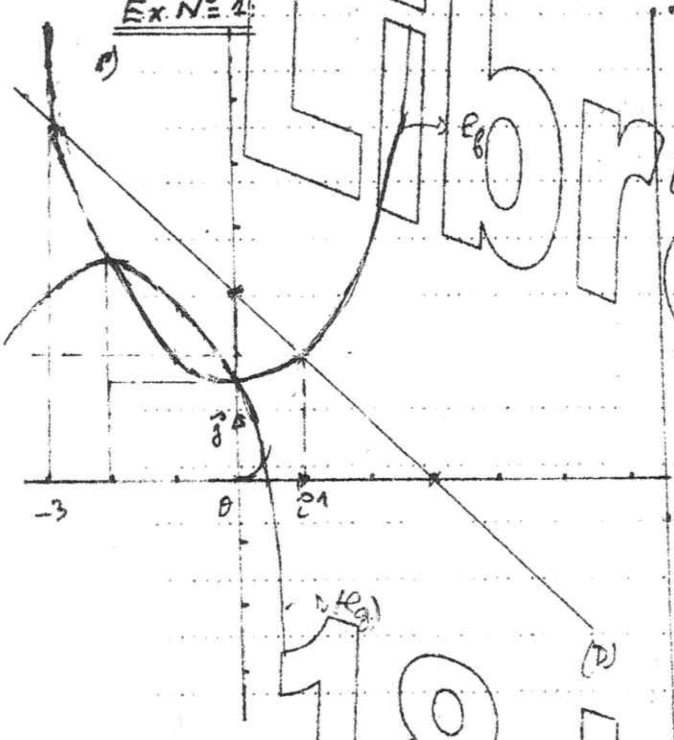
a- Montrer que ζ' est un cercle

b- Montrer que ζ et ζ' sont tangents extérieurement

L-P-S   D.C N° 6   20   2ème sc

Ex N° 1

1°)



$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}$

$(\mathcal{C}_f)$ est un parabole de sommet $S(0, \frac{3}{2})$ et $x = 0$ est l'axe de symétrie.

2°) a) $(D) : y = -x + b$

$E(-3 ; f(-3) = \frac{9}{2} + \frac{3}{2} = 6) \in (D)$

$6 = -(-3) + b$

$b = 6 - 3 = 3$

D'où $\boxed{(D) : y = -x + 3}$

b) $y = f(x)$

$-x + 3 = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}$

$\frac{x^2}{2} + x - 3 + \frac{3}{2} = 0$

$\frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2} = 0$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$1 + 2 - 3 = 0$

$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + 3 = 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = \frac{-3}{1} = -3 \\ y = -(-3) + 3 = 6 \end{cases}$

Les pts d'intersection de (D) et $(\mathcal{C})$ sont de coordonnées $(1, 2)$ et $(-3, 6)$

$f(x) \leq -x + 3 = y$ (D)

$\mathcal{C}_f$ est au dessous de (D)

$x \in [-3, 1]$

$S_{\mathbb{R}} = [-3, 1]$

3°) a) $g(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + \frac{7}{2}$

$\mathcal{C}_g$ est un parabole de sommet $S'(-2 ; \frac{7}{2})$ et d'axe de symétrie $x = -2$

b) $g(x) = 0$

$-\frac{1}{2}(x+2)^2 + \frac{7}{2} = 0$

$-(x+2)^2 + 7 = 0$

$(x+2)^2 = 7$

$x + 2 = \sqrt{7}$ ou $x + 2 = -\sqrt{7}$

$x = \sqrt{7} - 2$ ou $x = -\sqrt{7} - 2$

c) $g(x) \geq 0$

$\mathcal{C}_g$ est au dessus de $(y = 0)$

$x \in]-\sqrt{7} - 2 ; \sqrt{7} - 2[$

$S_{\mathbb{R}} =]-\sqrt{7} - 2 ; \sqrt{7} - 2[$

4°) $F(0, 2)$ $(\Delta) : y = 1$

$(\Delta) : y - 1 = 0$

$d(M, (\Delta)) = \frac{|y-1|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{|y-1|}{1} = |y-1|$

$MF = \sqrt{(0-x)^2 + (2-y)^2} = \sqrt{x^2 + 4 + y^2 - 4y}$

$MF = d(M, \Delta)$ ssi $\sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4} = |y - 1|$

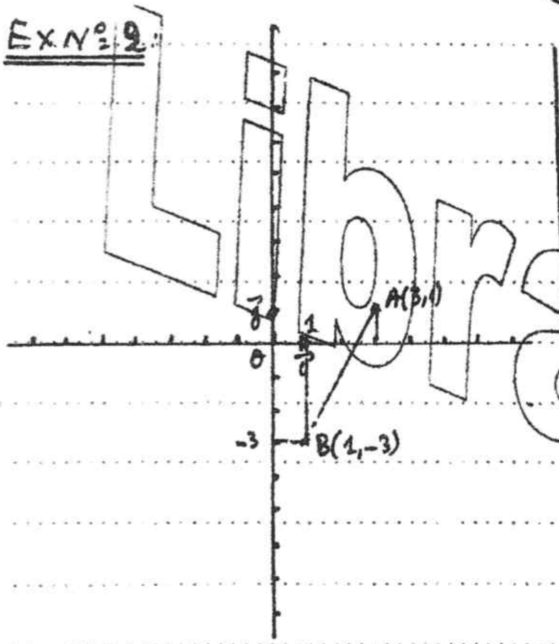
ssi $x^2 + y^2 - 4y + 4 = (y-1)^2 = y^2 - 2y + 1$

$x^2 + 4 - 1 = 4y - 2y$

$x^2 + 3 = 2y$ ssi $y = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} = f(x)$

D'où $M(x, y) \in (\mathcal{C}_f)$

EX N° 2 :



1°) $I = A * B$

$x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{3+1}{2} = 2$

$y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{1+(-3)}{2} = -1$

$I(2, -1)$

$IA = \sqrt{(3-2)^2 + (1-(-1))^2}$

$= \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

d'où $(\mathcal{C})$: $(x-2)^2 + (y-(-1))^2 = \sqrt{5}^2$

$\boxed{(\mathcal{C}) : (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5}$

2°) a) $O(0,0)$

$(0-2)^2 + (0+1)^2 = (-2)^2 + 1^2 = 4+1 = 5$

d'où $O \in (\mathcal{C})$

b). $\overrightarrow{IO}\begin{pmatrix} 0-2 \\ 0-(-1) \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IO}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D)

d'où (D) : $-2x + y + c = 0$

or $O(0,0) \in (D)$ $-2\times 0 + 0 + c = 0$

$c = 0$

D'où $\boxed{(D) : -2x + y = 0}$

3°) a). $d(I, \Delta) = \dfrac{|2 - 3\times(-1) - 10|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}}$

$= \dfrac{|5-10|}{\sqrt{13}} = \dfrac{|-5|}{\sqrt{13}} = \dfrac{5}{\sqrt{13}} = \dfrac{5\sqrt{13}}{13} < \sqrt{5}$

(car $\left(\dfrac{5\sqrt{13}}{13}\right)^2 = \dfrac{5}{13}$ $(\sqrt{5})^2 = 5$

$\dfrac{5}{13} < 5$ d'où $\dfrac{5\sqrt{13}}{13} < \sqrt{5}$)

D'où (Δ) et $(\mathcal{C})$ sont sécantes en deux points

(Δ) : $x - 3y - 10 = 0$

$x = 3y + 10$

$(\mathcal{C})$: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$

$(3y + 10 - 2)^2 + (y+1)^2 = 5$

$(3y+8)^2 + y^2 + 2y + 1 = 5$

$9y^2 + 64 + 48y + y^2 + 2y + 1 - 5 = 0$

$10y^2 + 50y + 60 = 0$

$y^2 + 5y + 6 = 0$

$\Delta = 25 - 24 = 1$

$y = \dfrac{-5-1}{2} = -3$ ou $y = \dfrac{-5+1}{2} = -2$

$x = 3\times(-3) + 10 = 1$ ou $x = 3\times(-2) + 10 = 4$

D'où $C(4; -2)$ et l'autre point est de coordonnées $(1; -3)$

b) on a $O(0,0)$; $I(2,-1)$ et $C(4,-2)$

$\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix} 2-0 \\ -1-0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix} 4-0 \\ -2-0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2\times(-2) - (-1)\times 4 = -4 + 4 = 0$

D'où $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont colinéaires

Donc O, I et C sont alignés.

4°) a) $(\mathscr{C}') = \{M(x,y) \text{ tq } x^2+y^2+6x-3y=0\}$

$M(x,y)\in(\mathscr{C}')$ ssi $x^2+6x+y^2-3y=0$

ssi $(x+3)^2-9+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}=0$

ssi $(x+3)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=9+\frac{9}{4}=\frac{36+9}{4}=\frac{45}{4}$

d'où $(\mathscr{C}')$ est le cercle de centre $J(3,\frac{3}{2})$

et de rayon $R'=\sqrt{\frac{45}{4}}=\frac{\sqrt{45}}{2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$

b) on a $(\mathscr{C})$ le cercle de centre $I(2,-1)$

et de rayon $R=\sqrt{5}$

et $(\mathscr{C}')$ le cercle de centre $J(-3;\frac{3}{2})$

$IJ=\sqrt{(-3-2)^2+\left(\frac{3}{2}-(-1)\right)^2}$

$=\sqrt{25+\left(\frac{5}{2}\right)^2}$

$=\sqrt{25+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{125}{4}}=\frac{5\sqrt{5}}{2}$

$R+R'=\sqrt{5}+\frac{3\sqrt{5}}{2}=\frac{2\sqrt{5}+3\sqrt{5}}{2}=\frac{5\sqrt{5}}{2}$

d'où $IJ=R+R'$

donc $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont tangentes extérieurements