Lycée Pilote de Sousse	Devoir de contrôle n° 6	Professeur : Salem Hassine
Année scolaire : 2021/2022	Date : 16 mai 2022	Matière : Mathématiques
$3^{ème}$ trimestre	Durée : 1 heure	Classe : $2^{ème}Sc_4$

Exercice 1: (12 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, on a $f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$.

2) Etudier les variations de f sur $]-\infty,1[$ et sur $]1,+\infty[$.

3) Tracer $\mathscr{C}_f$.

4) Soit D_m la droite d'équation $y = -x + m$ où m est un réel.

a- Déterminer l'ensemble (E) des réels m pour lesquels D_m coupe $\mathscr{C}_f$ en deux points distincts M_1 et M_2.

b- Soit m un réel de l'ensemble (E). On note I_m le milieu du segment $[M_1M_2]$.

Déterminer l'ensemble des points I_m lorsque m varie sur (E).

5) Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{1}{|x|-1}$.

a- Montrer que h est paire puis tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}_h$ à partir de $\mathscr{C}_f$.

b- En utilisant le graphique, donner le tableau de variation de h.

6) Soit D la droite d'équation $y = x$.

a- Soient $M(x , y)$ et $M'(x' , y')$ deux points symétriques par rapport à la D. Montrer que $x' = y$ et $y' = x$.

b- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $g(x) = \frac{x-1}{x-2}$. On désigne par $\mathscr{C}_g$ sa représentation graphique dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Montrer que $\mathscr{C}_g$ est l'image de $\mathscr{C}_f$ par la symétrie axiale d'axe D.

Exercice 2: (8 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des points $M(x , y)$ tels que $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 8 = 0$.

1) Montrer que $\mathscr{C}$ est un cercle dont on précisera le centre I et le rayon R.

2) Vérifier que $A(1 , -1) \in \mathscr{C}$ et déterminer une équation cartésienne de la tangente Δ à $\mathscr{C}$ en A.

3) Déterminer une équation cartésienne des tangentes (T_1) et (T_2) à $\mathscr{C}$ qui sont perpendiculaires à Δ.

4) Soit la droite $D: 3x - y - 6 = 0$. Montrer que D et $\mathscr{C}$ sécants puis déterminer leurs points communs E et F.

5) Soit la droite $D_m : y = x + m$ où $m\in\mathbb{R}$. Déterminer les valeurs de m pour que D_m coupe $\mathscr{C}$ en deux points J et K tel que le triangle IJK soit équilatéral.

Lycée pilote de Sousse
Le ../../2022

Correction du devoir de contrôle n° 6
Mathématiques

2ème ... copie

Exercice 1 :

$f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$

1) pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$$

$\Rightarrow$ pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$f(x) = \frac{2x-1-1+1}{x-1}$$

$\Rightarrow$ pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$f(x) = \frac{2x-2+1}{x-1}$$

$\Rightarrow$ pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$f(x) = \frac{2(x-1)}{x-1} + \frac{1}{x-1}$$

$\Rightarrow$ pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$$

Soient $a, b \in]-\infty, 1[$ tq $a \le b$

$f(b) - f(a) = \left(2 + \dfrac{1}{b-1}\right) - \left(2 + \dfrac{1}{a-1}\right)$

$= \dfrac{1}{b-1} - \dfrac{1}{a-1} = \dfrac{(a-1)-(b-1)}{(b-1)(a-1)}$

$= \dfrac{a-b}{(b-1)(a-1)} \le 0$

$\Rightarrow f$ est décroissante sur $]-\infty, 1[$ et de même sur $]1, +\infty[$.

)

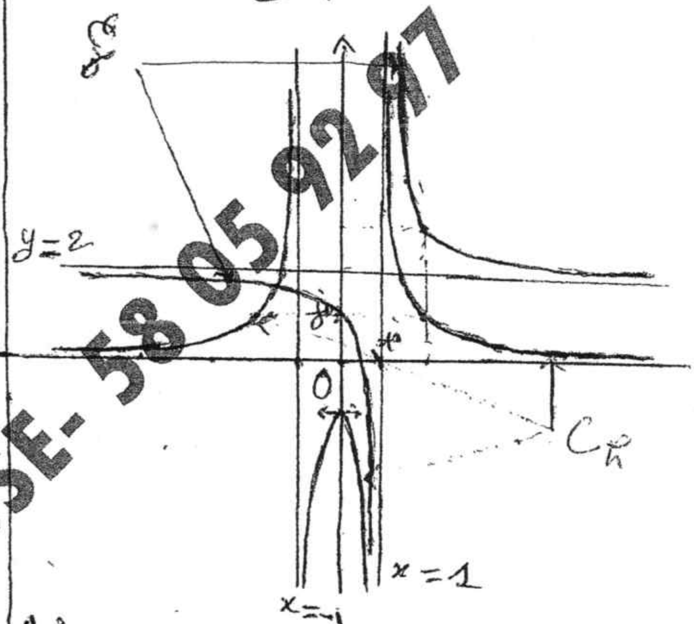
x	$-\infty$		1		$+\infty$
f	2	$\searrow$ $-\infty$ ‖ $+\infty$	‖	$\searrow$	2

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2 + \dfrac{1}{x-1} = 2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2 + \dfrac{1}{x-1} = 2$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} 2 + \dfrac{1}{x-1} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} 2 + \dfrac{1}{x-1} = +\infty$



4) $D_m : y = -x + m$, $m \in \mathbb{R}$

a- $M(x,y) \in D_m \cap \mathscr{C}_f \Rightarrow \begin{cases} y = 2 + \dfrac{1}{x-1} \\ y = -x + m \end{cases}$

$\Rightarrow 2 + \dfrac{1}{x-1} = -x + m$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x-1} = -x + m - 2$

$\Rightarrow (-x+m-2)(x-1) = 1$

$\Rightarrow -x^2 + x + (m-2)x - (m-2) = 1$

$\Rightarrow \boxed{-x^2 + (m-1)x - m + 1 = 0}$

$\Delta = (m-1)^2 - 4(-1)(-m+1)$

$= (m-1)^2 - 4$ copie

$\Delta = (m-1)(m-1-4)$

$= (m-1)(m-5)$

Étudions le signe de Δ

m	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$m-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$m-5$		$-$		$-$	0	$+$	
Δ		$+$	0	$-$	0	$+$	

D_m coupe C_f en deux points distincts M_1 et M_2 si et seulement si $\Delta > 0 \Rightarrow m \in]-\infty, 1[\cup]5, +\infty[$

donc $E =]-\infty, 1[\cup]5, +\infty[$

b- $m \in E$, I_m milieu de $[M_1M_2]$

$\Rightarrow I_m\left(\dfrac{x_{1m}+x_{2m}}{2}, \dfrac{y_{1m}+y_{2m}}{2}\right)$

avec $M_1(x_{1m}, y_{1m})$ et $M_2(x_{2m}, y_{2m})$

$x_{1m} = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_{2m} = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$y_{1m} = -x_{1m}+m$ et $y_{2m} = -x_{2m}+m$

$\dfrac{x_{1m}+x_{2m}}{2} = \dfrac{\frac{-2b}{2a}}{2} = -\dfrac{b}{2a}$

$= -\dfrac{(m-1)}{2\times(-1)} = \dfrac{m-1}{2}$

$\dfrac{y_{1m}+y_{2m}}{2} = \dfrac{-x_{1m}+m-x_{2m}+m}{2}$

$= \dfrac{-(x_{1m}+x_{2m})+2m}{2}$

$= -\dfrac{x_{1m}+x_{2m}}{2} + m$

$= -\dfrac{m-1}{2} + m$

$= \dfrac{1-m}{2} + \dfrac{2m}{2} = \dfrac{1+m}{2}$

donc $I_m\left(\dfrac{m-1}{2}, \dfrac{m+1}{2}\right)$

5) $h(x) = \dfrac{1}{|x|-1}$

a- h existe si $|x|-1 \neq 0$

$\Rightarrow |x| \neq 1 \Rightarrow x \neq -1$ et $x \neq 1$

donc $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

on a $\begin{cases} \text{si } x \in D_h, -x \in D_h \\ h(-x) = \dfrac{1}{|-x|-1} = \dfrac{1}{|x|-1} = h(x) \end{cases}$

donc h est paire

si $x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[$

$|x| = x$

donc $h(x) = \dfrac{1}{x-1} = f(x) - 2$

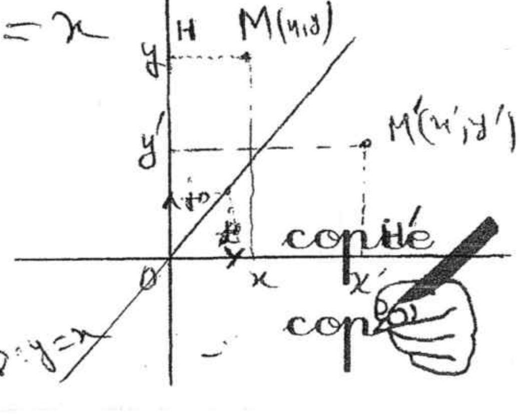
donc $C_h = T_{-2\vec{j}}(C_f)$

on trace C_h sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$ et complète par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées car h est paire.

b- D'après le graphique on a :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
h	0	$\nearrow$	$+\infty \mid\mid -\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty \mid\mid +\infty$	$\searrow$	0

6) $D: y = x$



$S_D(M) = M'$

$\Rightarrow$ D médiatrice de $[MM']$

D passe par O $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ D est bissectrice de l'angle $\widehat{MOM'}$

si on désigne par H le projeté orthogonale de M sur l'axe des ordonnées et par H' le projeté orthogonale de M' sur l'axe des abscisses

D serai aussi bissectrice de l'angle $\widehat{HOH'}$

d'où $\widehat{MOH} = \widehat{M'OH'}$

d'autre les deux triangles MHO et M'H'O sont rectangles en H et H'

d'où MHO et M'H'O sont isométriques

d'où $OH' = OH$ et $M'H' = MH$

c-à-d $x' = y$ et $y' = x$

– pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$\frac{x-1}{x-2} \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$?\left(\frac{x-1}{x-2}\right) = 2 + \frac{1}{\frac{x-1}{x-2} - 1}$

$= 2 + \frac{1}{\frac{x-1-x+2}{x-2}}$

$= 2 + \frac{x-2}{1} = x$

$\Rightarrow f \equiv g^{-1}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_f$ sont symétriques par rapport D. c-à-d $\mathcal{C}_g$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie axiale d'axe D.

Exercice 2 :

$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 6x + 4y + 8 = 0$

1) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 8 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 + 4y + 4 - 4 + 8 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 - 5 = 0$

$\Leftrightarrow \mathcal{C} : (x-3)^2 + (y+2)^2 = (\sqrt{5})^2$

donc $\mathcal{C}$ est un cercle de centre $I(3,-2)$ et de rayon $R = \sqrt{5}$

2) $(1-3)^2 + (-1+2)^2 = 5 = R^2$

$\Rightarrow A(1,-1) \in \mathcal{C}$

$M(x,y) \in \Delta$ tangente à $\mathcal{C}$ en A

$\Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{AI} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 2(x-1) - (y+1) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 2 - y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow y = 2x - 3$

donc $\Delta : y = 2x - 3$

$\Delta : y = 2x - 3$

une tangente T à $\mathscr{C}$ perpendiculaire à Δ est de vecteur normale $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ car Δ est de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

T tangente à $\mathscr{C}(I, \sqrt{5})$

$\Rightarrow d(I, T) = \sqrt{5}$

$\Rightarrow \dfrac{|1\times 3 + 2\times(-2) + C|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \sqrt{5}$

avec $T : x + 2y + C = 0$ et $I(3, -2)$

d'où $|C - 1| = 5 \Rightarrow C - 1 = 5$ ou ...

$\Rightarrow C = 6$ ou $C = -4$

donc $T_1 : x + 2y + 6 = 0$ et $T_2 : x + 2y - 4 = 0$

) D, $3x - y - 6 = 0$

$d(I, D) = \dfrac{|3\times 3 - (-2) - 6|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} < \sqrt{5} = R$

$\Rightarrow D$ et $\mathscr{C}$ sont sécants

$M(x, y) \in D \cap \mathscr{C} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)^2 + (y+2)^2 = 5\\ 3x - y - 6 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)^2 + (3x-6+2)^2 = 5\\ y = 3x - 6\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)^2 + (3x-4)^2 = 5\\ y = 3x - 6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2 - 6x + 9 + 9x^2 - 24x + 16 = 5\\ y = 3x - 6\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}10x^2 - 30x + 20 = 0\\ y = 3x - 6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2 - 3x + 2 = 0\\ y = 3x - 6\end{cases}$

$a + b + c = 0 \Rightarrow \begin{cases}x_1 = 1 \text{ et } x_2 = \frac{c}{a} = 2\\ y = 3x - 6\end{cases}$

d'où $E(1, -3)$ et $F(2, 0)$

$D_m : y = x + m$; $m \in \mathbb{R}$ $\quad D_m$ coupe $\mathscr{C}$ en deux points J et K

$\Rightarrow d(I, D_m) < R = \sqrt{5} \Rightarrow \dfrac{|3 - (-2) + m|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} < \sqrt{5} \Rightarrow |m+5| < \sqrt{10}$

$\Rightarrow -\sqrt{10} < m + 5 < \sqrt{10} \Rightarrow -\sqrt{10} - 5 < m < \sqrt{10} - 5$

$(x, y) \in D_m \cap \mathscr{C} \Leftrightarrow \begin{cases}y = x + m\\ (x-3)^2 + (y+2)^2 = 5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = x + m\\ (x-3)^2 + (x + m + 2)^2 = 5\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y = x + m\\ x^2 - 6x + 9 + x^2 + 2(m+2)x + (m+2)^2 = 5\end{cases}$

$J(x_J, y_J)$

$K(x_K, y_K)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y = x + m\\ 2x^2 + 2(m-1)x + (m+2)^2 + 4 = 0\end{cases}$

$\Delta' = (m-1)^2 - 2[(m+2)^2 + 4]$

$= m^2 - 2m + 1 - 2m^2 - 8m - 16$

$= -m^2 - 10m - 16$

on pose $x_J = \dfrac{-(m-1) - \sqrt{\Delta'}}{2}$

$x_K = \dfrac{-(m-1) + \sqrt{\Delta'}}{2}$

$\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix}x_K - x_J\\ y_K - y_J\end{pmatrix}$ $\quad y_K - y_J = x_K + m - x_J - m = x_K - x_J$

donc $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix}x_K - x_J\\ x_K - x_J\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{\Delta'}\\ \sqrt{\Delta'}\end{pmatrix}$

IJK équilatéral $\Rightarrow JK = \sqrt{5}$

$\Rightarrow \sqrt{(\sqrt{\Delta'})^2 + (\sqrt{\Delta'})^2} = \sqrt{5}$

$\Rightarrow \sqrt{2\Delta'} = \sqrt{5}$

$\Rightarrow \Delta' = 5/2$

$\Rightarrow -m^2 - 10m - 16 = 5/2$

$\Rightarrow 2m^2 + 20m + 37 = 0$

on vérifie Δ et choisi m