Lycée Pilote de Sousse

Mai : 2022

Devoir de contrôle N° 6 | **Durée : 1H**

2ème année Science 7 | M : Znaidi Fayçal

Exercice N° 1 : {10 Points}

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$,

on considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{3x+6}{2x+2}$

On désigne par (C) sa courbe dans ce repère.

1) a) Déterminer le domaine D de f

b) Préciser le sens de variation de f sur D

2) a) Déterminer les coordonnées des points d'intersections de (C) avec les axes du repére

b) Tracer la courbe (C)

3) on donne les points: $A(-2\,,0)$; $B(7\,;3)$ et $C(1\,;-3)$.

a) Montrer que ABC est un triangle en C

b) Déterminer une équation cartésienne du cercle Γ circonscrit au triangle ABC

4) Soit g la fonction définie par $g(x)=\dfrac{3x+6}{2|x+1|}$

a) Déterminer le domaine D' de g

b) Tracer la courbe (C') de g dans le même repère

c) Déterminer graphiquement et suivant les valeurs de m le nombre des solutions de l'équation $E_m: 3x+6-2m|x+1|=0$

Exercice N° 2 : {6 Points}

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

on donne les points : $A(0\,;1)$ et $I(2\,;5)$

(C) le cercle de centre I et passant par A

1) a) Donner une équation cartésienne de (C)

b) Tracer (C).

c) Déterminer une équation cartésienne de la droite (IA).

2) tracer sur la même figure la droite Δ d'équation : $x-2y-6=0$

3) Soit (C') un cercle tangent extérieurement à (C) et aussi à Δ

on note J le centre de (C') et a l'abscisse de J .

a) Démontrer que l'ordonnée J est: $2a+1$

b) Exprimer en foction de a :

*) la distance AJ

*) $d(J;\Delta)$ distance entre J et Δ

c) Déterminer alors l'équation cartésienne du cercle (C')

Exercice N° 3 : {4 Points}

La courbe ci – dessus est la représentation graphique (C) de f définie par: $f(x)=\frac{2x+b}{x+d}$

1) a) Déterminer le domaine de définition de f

b) Déterminer $f(3)$ et dresser le tableau de variation de f

c) Préciser le centre Ω et les asymptotes à (C) :

2) a) montrer que $f(x)=\frac{2x-1}{x+2}$

b) Ecrire l'équation de (C) dans repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$.

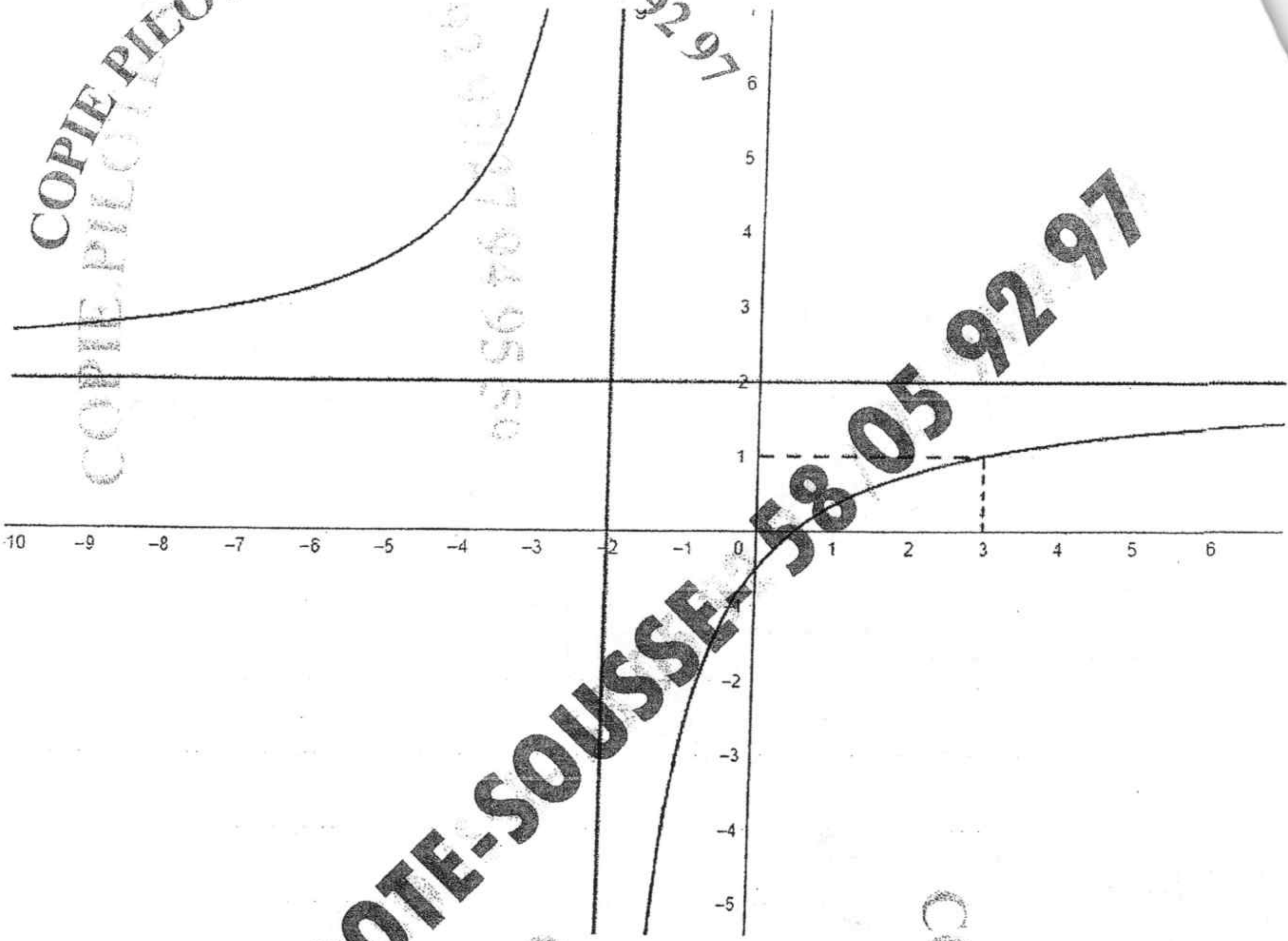
3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-6\}$ par : $g(x)=\dfrac{6x-9}{x+6}$.

on désigne par (C') sa courbe réprésentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

Soit $M'(x',y')$ un point variable de (C') et $M(x,y)$ le barycentre des points pondérés $\{(M',1),(O,2)\}$

a) Exprimer y en fonction de x

b) déduire l'ensemble sur lequel varie le point M lorsque M' varie sur (C')


-10
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
-2
-3
-4
-5

Correction du devoir de contrôle N°6

Exercice 1 :

$f(x) = \dfrac{3x+6}{2x+2}$

1) a) f existe si et seulement si

$2x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

donc $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2) soient $a, b \in]-\infty, -1[$ tq $a \leq b$

$f(x) = \dfrac{3x+3+3}{2(x+1)} = \dfrac{3(x+1)+3}{2(x+1)}$

$= \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2(x+1)}$

$f(b) - f(a) = \dfrac{3}{2(b+1)} - \dfrac{3}{2(a+1)} = \dfrac{6(a-b)}{4(b+1)(a+1)} \leq 0$

$\Rightarrow$ f est décroissante sur $]-\infty, -1[$

de même sur $]-1, +\infty[$

donc f est décroissante sur D

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f	$3/2$	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	$3/2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x+6}{2x+2} = \dfrac{3}{2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x+6}{2x+2} = \dfrac{3}{2}$

$\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{3x+6}{2x+2} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (-1)^+} \dfrac{3x+6}{2x+2} = +\infty$

a) $M(x,y) \in (O, \vec{i}) \cap \mathcal{C}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{3x+6}{2x+2}, \ x \in D \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 3x+6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$

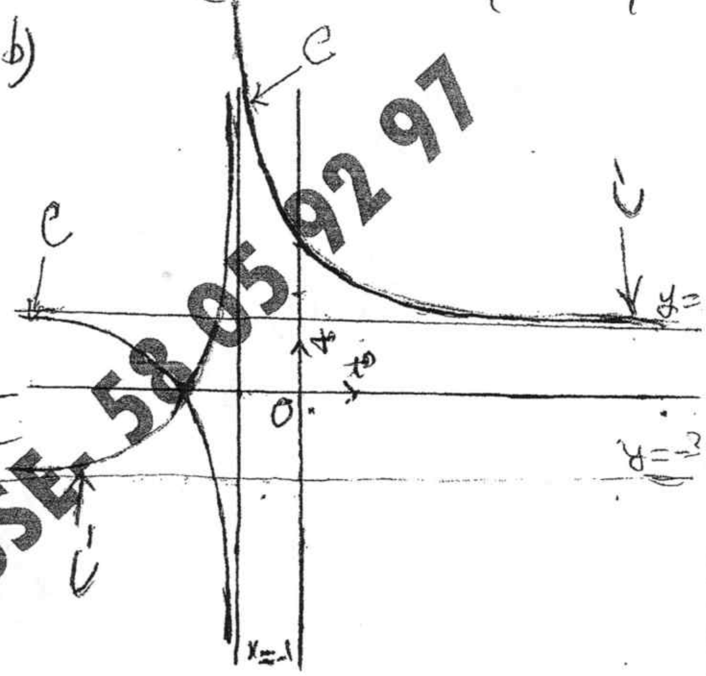
donc $(O, \vec{i}) \cap \mathcal{C} = \{(-2, 0)\}$

$M(x,y) \in (O, \vec{j}) \cap \mathcal{C} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{3x+6}{2x+2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$

donc $(O, \vec{j}) \cap \mathcal{C} = \{(0, 3)\}$.

b)



3) $A(-2, 0)$, $B(7, 3)$ et $C(1, -3)$

a) $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

$= -3 \times 6 + 3 \times 6 = 0$

$\Rightarrow \vec{CA}$ et $\vec{CB}$ sont orthogonaux

$\Rightarrow$ ABC est un triangle rectangle en C.

b) Γ circonscrit au triangle ABC $\Rightarrow [AB]$ est le diamètre de Γ car ABC est rectangle en C alors si I est le centre de Γ alors

$I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}\right) \Rightarrow I\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

Le rayon de Γ est $R = \frac{AB}{2}$

$$= \frac{\sqrt{(7+2)^2+(3-0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{81+9}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{90}}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

donc (Γ) : $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{90}{4}$

)
$$g(x) = \frac{3x+6}{2|x+1|}$$

1) g existe si $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

$\Rightarrow D' = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

2)
$$g(x) = \begin{cases} \frac{3x+6}{2(x+1)} & \text{si } x > -1 \\ -\frac{3x+6}{2(x+1)} & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

c-à-d $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > -1 \\ -f(x) & \text{si } x < -1 \end{cases}$

3) $E_m : 3x+6-2m|x+1| = 0$

$3x+6-2m|x+1| = 0$

$\Rightarrow \frac{3x+6}{2|x+1|} - m = 0$

$\Rightarrow g(x) = m$

si $m \in [-3/2, 3/2]$, E_m : $g(x) = m$ admet une unique solution.

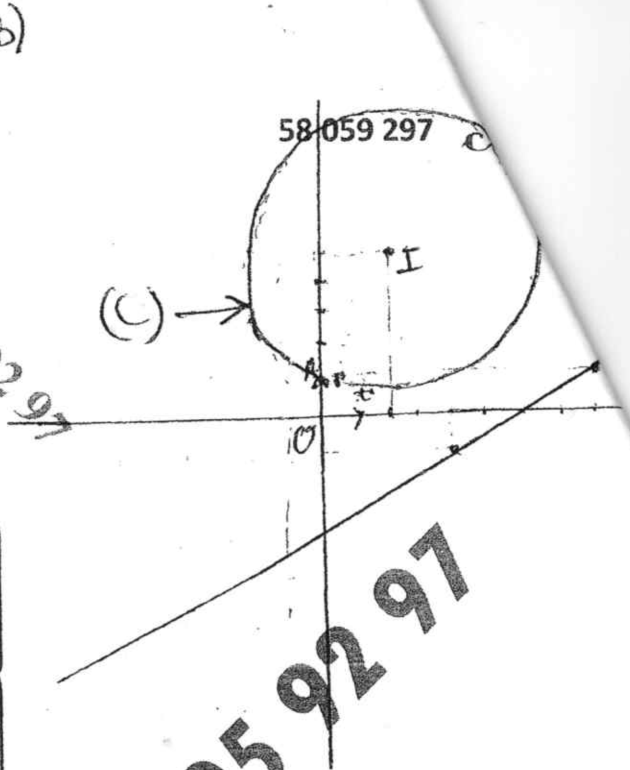
si $m \in]3/2, +\infty[$, E_m admet 2 solutions.

Exercice 2 : $A(0,1)$ et $I(2,5)$

1) a) $IA = \sqrt{(0-2)^2+(1-5)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

donc (C) : $(x-2)^2+(y-5)^2 = 20$

b)



c) pour (AI) : $y = ax+b$

$A(0,1) \in (IA) \Rightarrow 1 = b$

$I(2,5) \in (IA) \Rightarrow 5 = 2a+b$

$\Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ 5 = 2a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 2 \end{cases}$

donc (IA) : $y = 2x+1$.

2) Δ : $x-2y-6 = 0$

3)

$= \sqrt{(a-0)^2+(2a+1-1)^2}$

$= \sqrt{a^2+4a^2} = \sqrt{5a^2}$

$= \sqrt{5}\,|a|$

) $d(J,\Delta) = \dfrac{|a-2(2a+1)-6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$

$= \dfrac{|-3a-8|}{\sqrt{5}}$

c) $(C') : (x-a)^2+(y-(2a+1))^2 = \left(\dfrac{|-3a-8|}{\sqrt{5}}\right)^2$

<u>Exercice N°3</u> : $f(x) = \dfrac{2x+b}{x+d}$

1) a) d'après le graphe

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

) $f(3) = 1$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2

) $\Omega(-2,2)$ est le centre de C

$x=-2$ et $y=2$ sont les asymptotes de (C).

) a) $f(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{b}{d} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{d = -2b}$

$f(3) = 1 \Rightarrow \dfrac{6+b}{3+d} = 1$

$\Rightarrow 6+b = 3+d$

$\Rightarrow 6+b = 3-2b$

$\Rightarrow 3b = -3$

$\Rightarrow b = -1$ et $d = 2$

donc $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$

b) on suppose que $M(X,Y) \in (C)$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

et $M(x,y) \in (C)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

donc $\overrightarrow{\Omega M} = X\vec{i} + Y\vec{j}$

$\Rightarrow \overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{OM} = X\vec{i} + Y\vec{j}$

$\Rightarrow 2\vec{i} - 2\vec{j} + x\vec{i} + y\vec{j} = X\vec{i} + Y\vec{j}$

$\Rightarrow \begin{cases} X = x+2 \\ Y = y-2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} X = x+2 \\ Y = \dfrac{2x-1}{x+2} - 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} X = x+2 \\ Y = \dfrac{2x-1-2x-4}{x+2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} X = x+2 \\ Y = -\dfrac{5}{x+2} = -\dfrac{5}{X} \end{cases}$

donc (C) est d'équation $Y = -\dfrac{5}{X}$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.

3) a) $M(x,y)$ est le barycentre des points pondérés $\{(M',1);(O,2)\}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MM'} + 2\overrightarrow{MO} = \vec{0}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x' - 3x = 0 \\ y' - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y \end{cases}$

$\Rightarrow y = \frac{1}{3} y' = \frac{1}{3} \frac{6x'-9}{x'+6}$ car $M'(x', y') \in (C')$

$\left(y' = g(x') = \frac{6x'-9}{x'+6} \right)$

$\Rightarrow y = \frac{1}{3} \frac{6 \times 3x - 9}{3x+6} = \frac{1}{3} \frac{18x-9}{3x+6} = \frac{2x-1}{x+2} = f(x)$

b) $y = f(x) \Rightarrow M$ varie sur (C) lorsque M' varie sur (C').