Fonctions de références

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x-1)^2$. On appelle $\mathscr{C}$ la représentation de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f
2) a) Etudier les variations de f sur $]-\infty,1[$ et $]1,+\infty[$
   b) Déterminer l'axe et le sommet de $\mathscr{C}$
   c) Tracer $\mathscr{C}$
3) a) Tracer dans le même repère la droite Δ d'équation $y=1$
   b) Résoudre graphiquement l'équation $x^2-2x=0$
4) Soit la droite Δ' d'équation $y=4$. Résoudre graphiquement $x^2-2x-3<0$

Exercice 2 ***

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x-1$
   a) Ecrire $f(x)$ sous forme canonique
   b) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$
   c) Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$
2) Soit g la fonction définie par $g(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{7}{2}$
   a) Tracer $\mathscr{C}'$ la courbe représentative de g dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$
   b) Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection A et B de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$
   c) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)>g(x)$
3) Soit $x\in[-1,4]$ et soit M et N les points respectifs de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ d'abscisse x. Déterminer la valeur de x pour laquelle la distance MN est maximale.
4) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } f(x)>g(x) \\ g(x) & \text{si } f(x)\le g(x) \end{cases}$
   a) Déterminer l'expression de $h(x)$ en fonction de x
   b) Tracer la courbe représentative Γ de h (dans une figure séparée).
   c) Soit m un nombre réel. Discuter suivant les valeurs de m, le nombre des solutions de l'équation $h(x)=m$

Exercice 3 ***

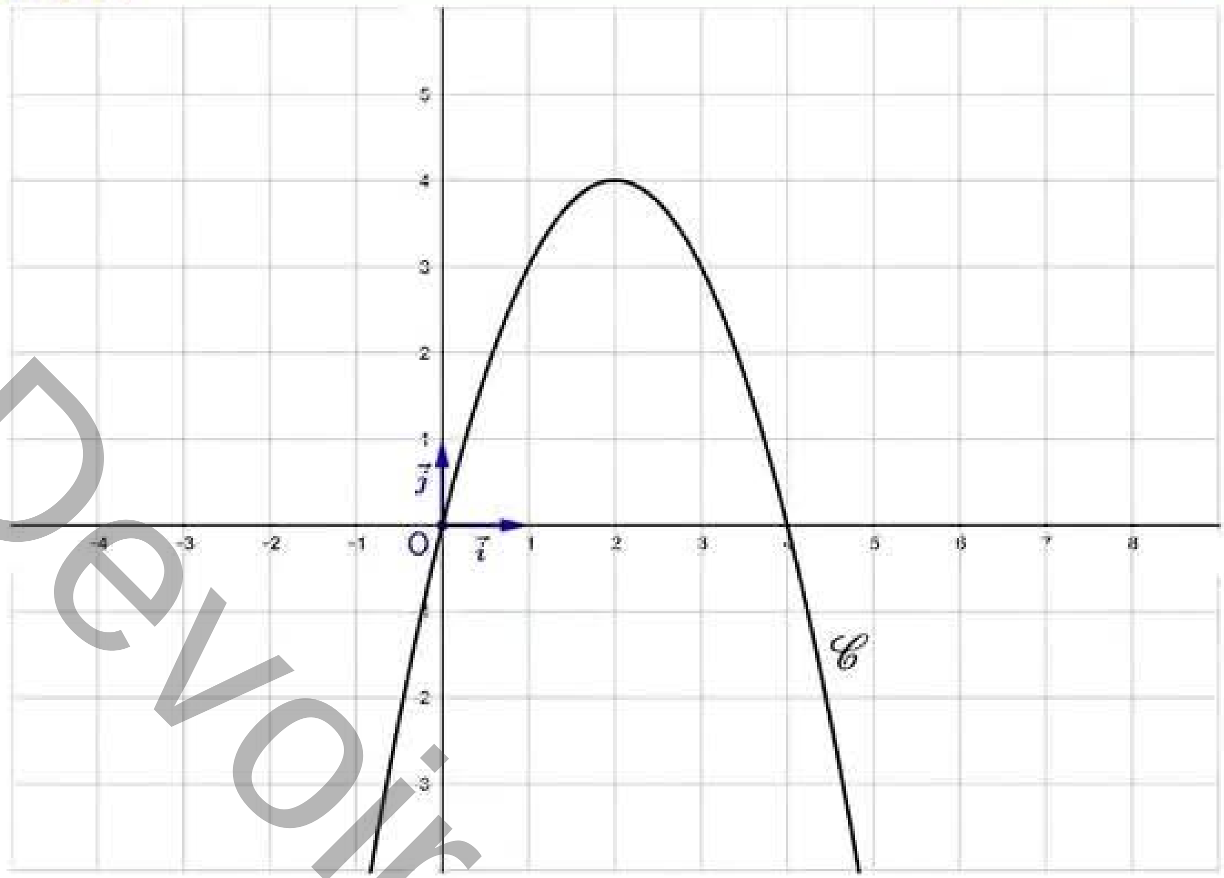
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Soit f la fonction définie par $f(x)=-\frac{1}{4}(x-3)^2+4$
   a) Etudier les variations de f
   b) Tracer $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f
2) Soit g la fonction définie par $g(x)=|f(x)|$ et soit $\mathscr{C}'$ sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$
   a) Expliquer comment construire la courbe $\mathscr{C}'$ à partir de $\mathscr{C}$
   b) Tracer $\mathscr{C}'$
   c) En déduire le tableau de variation de g
3) a) Tracer la droite $D: y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
   b) Résoudre graphiquement l'inéquation $\left|-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}\right|\ge\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

Exercice 4 ***

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Sur le graphique ci-dessous, la parabole $\mathscr{C}$ est la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ où a, b et c sont des nombres réels.



1) En utilisant le graphique, déterminer les réels a, b et c
2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\frac{1}{2}(x-3)^2+1$
   a) Etudier le sens de variation de g sur chacun des intervalles $]-\infty,3]$ et $[3,+\infty[$
   b) Caractériser puis tracer la courbe $\mathscr{C}'$ de g dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$
3) a) Déterminer une équation de la droite Δ passant par les points $A(1,3)$ et $B(3,1)$
   b) Résoudre graphiquement le système $(S):\begin{cases}4-x\le f(x)\\4-x\le g(x)\end{cases}$

Exercice 5

Soit la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x+4}$
1) Déterminer l'ensemble de définition de f
2) Etudier les variations de f
3) Construire $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$
4) Soit la droite $\Delta : y = x-2$
   a) Tracer Δ dans le même repère.
   b) Déterminer les coordonnés du point d'intersection de $\mathscr{C}$ et Δ
5) Soit la fonction g définie sur $[-4,+\infty[$ par $g(x)=\frac{x}{\sqrt{x+4}+2}$
   a) Montrer que pour $x\in[-4,+\infty[$, $g(x)=f(x)-2$
   b) En déduire une construction de $\mathscr{C}'$ la courbe représentative de g à partir de $\mathscr{C}$

Exercice 6

Le plan est rapporté d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$
1) Tracer $\mathscr{C}f$ courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2-1$
2) Soit g la fonction définie par $g(x)=\frac{-4}{x-1}$
   a) Déterminer l'ensemble de définition de g
   b) Préciser les asymptotes et le centre de symétrie de $\mathscr{C}g$ courbe représentative de la fonction g
   c) Tracer $\mathscr{C}g$ dans le même repère.
3) En utilisant le graphe

a) Donner les coordonnées du point A intersection de $\mathscr{C}f$ et $\mathscr{C}g$

b) Résoudre l'inéquation $g(x) \leq f(x)$

4) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x < -1 \\ f(x) & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

a) Tracer $\mathscr{C}h$ courbe représentative de la fonction h

b) Déduire les variations de h

Exercice 7

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = -\dfrac{4}{x}$

1) a) Etudier les variations de f sur son domaine de définition.

b) Tracer $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

2) Soit Δ la droite d'équation $y = x - 5$

a) Tracer Δ dans le même repère.

b) Déterminer graphiquement puis par le calcul les coordonnées des points d'intersection de Δ avec $\mathscr{C}$

c) Résoudre graphiquement $\dfrac{4}{x} + x < 5$

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{3x-3}{x-2}$

1) a) Vérifier que $f(x) = 3 + \dfrac{3}{x-2}$

b) Etudier le sens de variation de f sur chacun des intervalles $]-\infty, 2[$ et $]2, +\infty[$

2) Caractériser puis tracer $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

3) Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{3|x|-3}{|x|-2}$ et on désigne par $\mathscr{C}'$ sa courbe représentative.

a) Déterminer le domaine de définition de g

b) Montrer que g est paire.

c) Vérifier que $g(x) = f(x)$ si $x \geq 0$

4) a) Expliquer comment construire la courbe $\mathscr{C}'$ à partir de $\mathscr{C}$

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}'$ dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

5) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $g(x) = m$

Exercice 9

Soit $f(x) = a + \dfrac{b}{x+2}$, avec a et b sont deux réels, $\mathscr{C}f$ la courbe de f dans un repère orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Déterminer Df l'ensemble de définition de f

b) Déterminer l'expression de f sachant que $\mathscr{C}f$ passe par les points $A(0,1)$ et $B(2,2)$

2) Dans la suite on prend $a = 3$ et $b = -4$

a) Etudier les variations de f sur chacun des intervalles $]-\infty, -2[$ et $]-2, +\infty[$

b) Tracer $\mathscr{C}f$

3) a) Résoudre graphiquement $1 < f(x) < 4$

b) Déterminer l'intersection de $\mathscr{C}f$ et la droite $\Delta : y = x$

4) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{x+2}$

a) Déterminer Dg puis tracer $\mathscr{C}g$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

b) Résoudre graphiquement $3x + 2 - (x+2)\sqrt{x+2} < 0$

5) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{3|x|+2}{|x|+2}$

a) Montrer que la courbe $\mathscr{C}h$ de h est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

b) Tracer $\mathscr{C}h$ à partir de $\mathscr{C}f$

Exercice 10

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{4x-7}{2x-5}$ et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé

$(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) Déterminer l'ensemble de définition D de f

b) Montrer que $f(x) = 2 + \dfrac{3}{2x-5}$ pour tout $x \in D$

c) Etudier les variations de f sur $\left]-\infty, \dfrac{5}{2}\right[$ et $\left]\dfrac{5}{2}, +\infty\right[$

2) a) Préciser les asymptotes et le centre de symétrie I de la courbe $\mathscr{C}$

b) Tracer $\mathscr{C}$

3) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) \geq 3$

4) Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{4|x|-7}{2|x|-5}$

a) Etudier et interpréter graphiquement la parité de g

b) Tracer à partir de $\mathscr{C}$ la courbe $\mathscr{C}'$ de g dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

Exercice 1

1) $D_f = \mathbb{R}$

2) a) Soit $a,b \in]-\infty,1[$ tel que $a < b$

$f(b)-f(a)=(b-1)^2-(a-1)^2=(b-1+a-1)(b-1-a+1)=(b+a-2)(b-a)$

$a,b \in]-\infty,1[$ donc $a<1$ et $b<1$ donc $b+a-2<0$

d'autre part $a<b$ donc $b-a<0$ et par suite $f(b)-f(a)<0$ donc f est décroissante sur $]-\infty,1[$

Soit $a,b \in]1,+\infty[$ tel que $a<b$

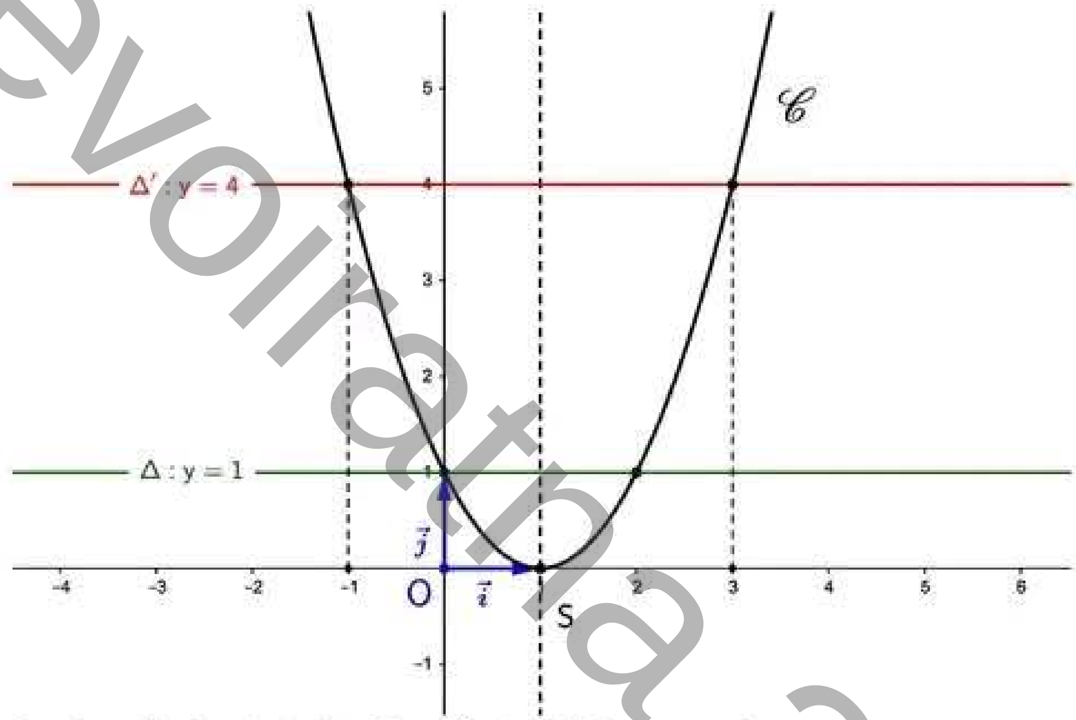
$f(b)-f(a)=(b-1)^2-(a-1)^2=(b-1+a-1)(b-1-a+1)=(b+a-2)(b-a)$

$a,b \in]1,+\infty[$ donc $a>1$ et $b>1$ donc $b+a-2>0$

d'autre part $a<b$ donc $b-a<0$ et par suite $f(b)-f(a)>0$ donc f est croissante sur $]1,+\infty[$

b) $\mathscr{C}$ est une parabole se sommet $S(1,0)$ et d'axe $x=1$

c)



3) b) $x^2-2x=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1-1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=1 \Leftrightarrow f(x)=1 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$

$S_{\mathbb{R}}=\{0,2\}$

4) $x^2-2x-3<0 \Leftrightarrow x^2-2x+1<4 \Leftrightarrow (x-1)^2<4 \Leftrightarrow f(x)<4$

$S_{\mathbb{R}}=]-1,3[$

Exercice 2

1) a) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x-1=\frac{1}{2}(x^2-4x-2)=\frac{1}{2}(x^2-4x+4-6)=\frac{1}{2}((x-2)^2-6)=\frac{1}{2}(x-2)^2-3$

b) → Soit $a,b \in]-\infty,2]$ tels que $a<b$

$a<b \Leftrightarrow a-2<b-2$

$\Leftrightarrow (a-2)^2>(b-2)^2$ car $a-2<b-2\le 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a-2)^2>\frac{1}{2}(b-2)^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a-2)^2-3>\frac{1}{2}(b-2)^2-3$

$\Leftrightarrow f(a)>f(b)$

donc f est strictement décroissante sur $]-\infty,2]$

→ Soit $a,b \in]2,+\infty[$ tels que $a<b$

$a<b \Leftrightarrow a-2<b-2$

$\Leftrightarrow (a-2)^2<(b-2)^2$ car $0\le a-2<b-2$

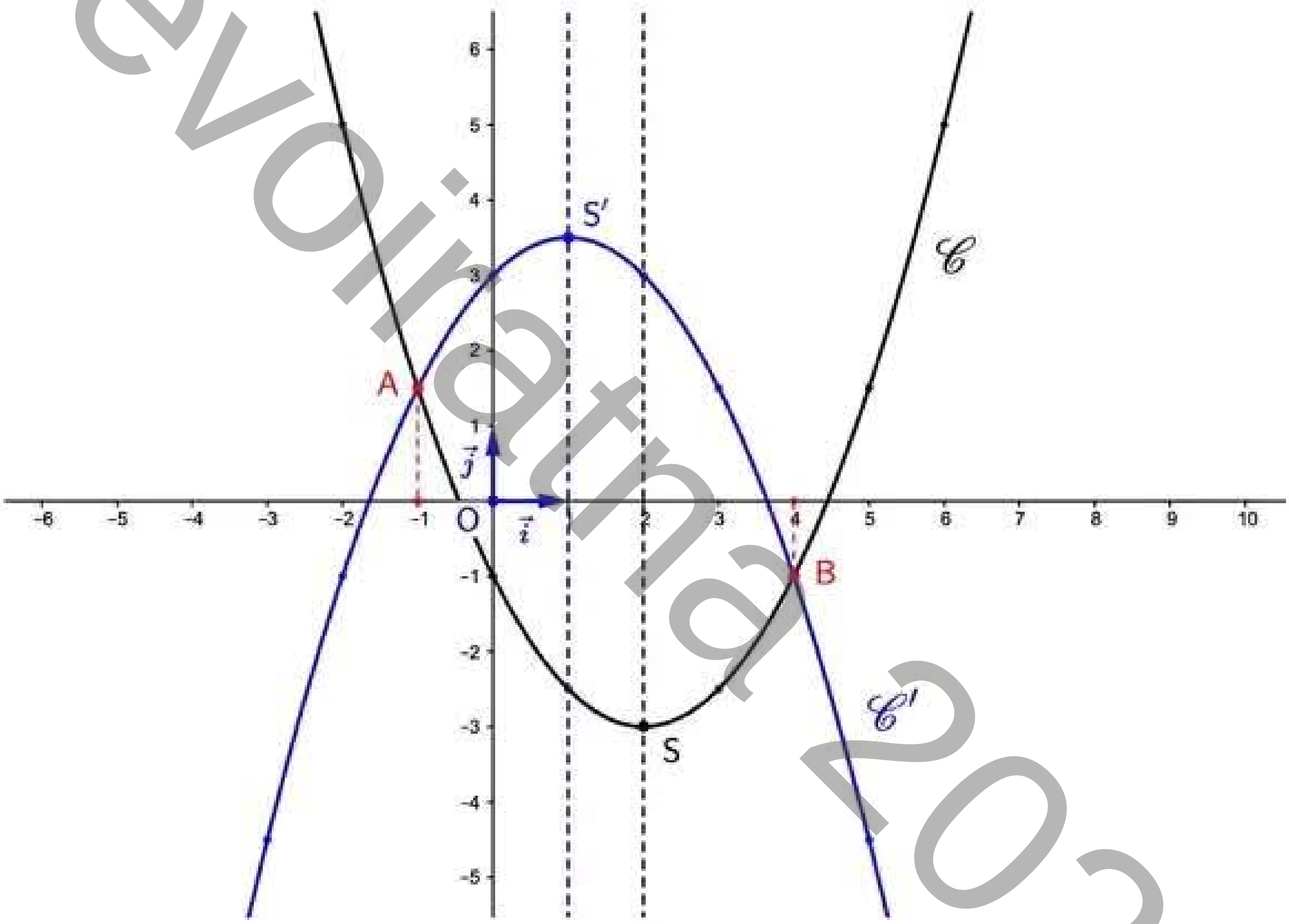
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a-2)^2 < \frac{1}{2}(b-2)^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a-2)^2 - 3 < \frac{1}{2}(b-2)^2 - 3$$
$$\Leftrightarrow f(a) < f(b)$$

donc f est strictement croissante sur $]-\infty, 2]$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f	↘	-3	↗

c) La courbe de f est une parabole d'axe $x = 2$ et de sommet $S(2,-3)$

x	3	4	5	6
$f(x)$	-2.5	-1	1.5	5



2) a) $\mathscr{C}'$ est une parabole d'axe $x = 1$ et de sommet $S'\left(-1, \frac{7}{2}\right)$

x	2	3	4	5
$g(x)$	3	$\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{9}{2}$

b) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1 = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{7}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1 = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) + \frac{7}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + x + 3$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 4$$

donc $A(-1,f(-1))=\left(-1,\frac{3}{2}\right)$ et $B(4,f(4))=(4,-1)$

c) $f(x)>g(x)$ $\qquad S_{\mathbb{R}}=\left]-\infty,-1\right[\cup\left]4,+\infty\right[$

3) Soit $x\in[-1,4]$

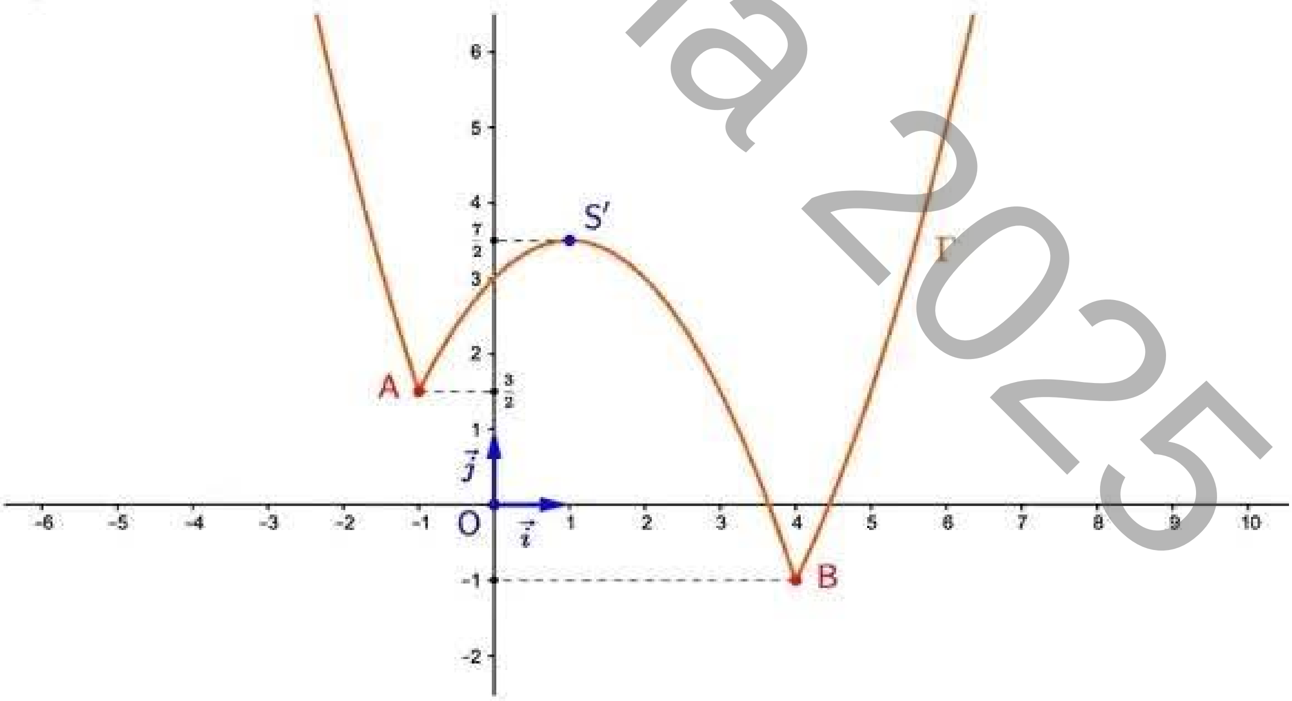
$M(x,f(x))$ et $N(x,g(x))$

$$\begin{aligned}
MN&=\sqrt{(x-x)^2+(f(x)-g(x))^2}\\
&=\sqrt{(f(x)-g(x))^2}\\
&=|f(x)-g(x)|\\
&=g(x)-f(x)\\
&=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{7}{2}-\frac{1}{2}x^2+2x+1\\
&=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}-\frac{1}{2}x^2+2x+1\\
&=-x^2+3x+4\\
&=-(x^2-3x-4)\\
&=-\left(x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}-4\right)\\
&=-\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right)\\
&=\frac{25}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

La distance MN est maximale lorsque $x=\frac{3}{2}$ et dans ce cas $MN=\frac{25}{4}$

4) a) $h(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2-x-1 & \text{si } x\le -1\\ -\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{7}{2} & \text{si } -1<x<4\\ \frac{1}{2}x^2-x-1 & \text{si } x\ge 4\end{cases}$

b)



c) → Si $m<-1$, l'équation $h(x)=m$ ne possède pas de solution

→ Si $m=-1$, l'équation $h(x)=m$ possède une solution unique.

→ Si $-1<m<\frac{3}{2}$, l'équation $h(x)=m$ possède exactement deux solutions.

→ Si $m = \frac{3}{2}$, l'équation $h(x) = m$ possède exactement trois solutions.

→ Si $\frac{3}{2} < m < \frac{7}{2}$, l'équation $h(x) = m$ possède exactement quatre solutions.

→ Si $m = \frac{7}{2}$, l'équation $h(x) = m$ possède exactement trois solutions.

→ Si $m > \frac{7}{2}$, l'équation $h(x) = m$ possède exactement deux solutions.

Exercice 3

1) a) → Soit a et b deux réels de $]-\infty, 3]$ tels que $a < b$

$$\begin{aligned} a < b &\Leftrightarrow a - 3 < b - 3 \\ &\Leftrightarrow (a-3)^2 > (b-3)^2 \text{ car } a < b < 3 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{4}(a-3)^2 < -\frac{1}{4}(b-3)^2 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{4}(a-3)^2 + 4 < -\frac{1}{4}(b-3)^2 + 4 \\ &\Leftrightarrow f(a) < f(b) \end{aligned}$$

donc f est strictement croissante sur $]-\infty, 3]$

→ Soit a et b deux réels de $]3, +\infty[$ tels que $a < b$

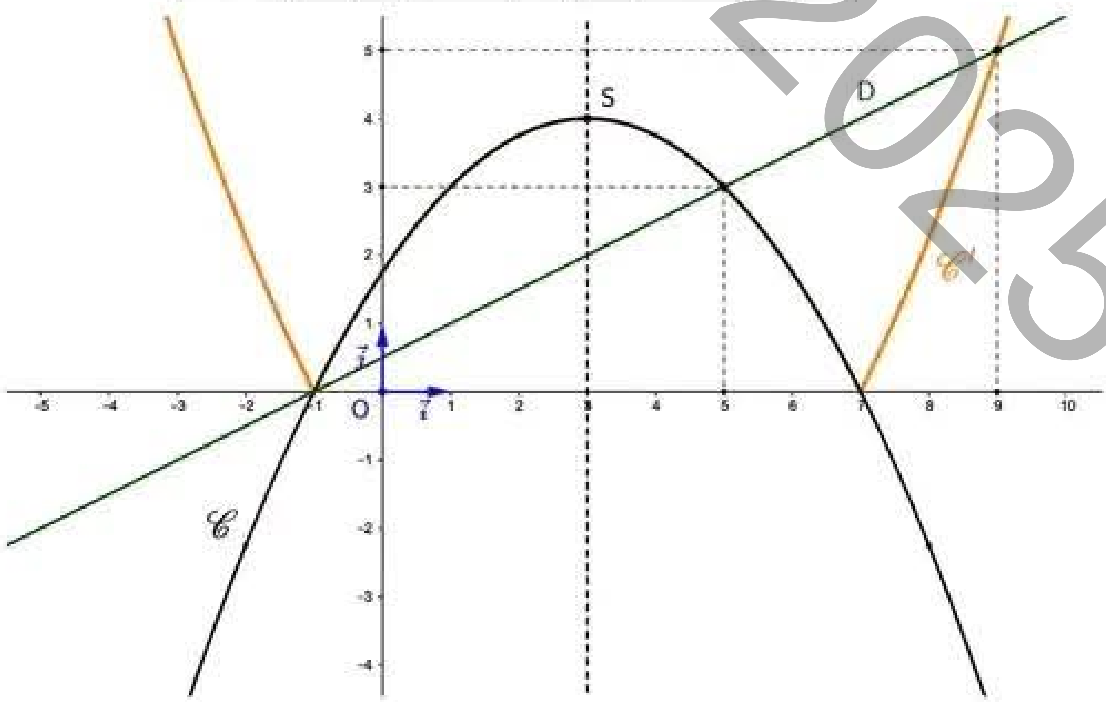
$$\begin{aligned} a < b &\Leftrightarrow a - 3 < b - 3 \\ &\Leftrightarrow (a-3)^2 < (b-3)^2 \text{ car } 3 < a < b \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{4}(a-3)^2 > -\frac{1}{4}(b-3)^2 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{4}(a-3)^2 + 4 > -\frac{1}{4}(b-3)^2 + 4 \\ &\Leftrightarrow f(a) > f(b) \end{aligned}$$

donc f est strictement décroissante sur $]3, +\infty[$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f	↗	4	↘

b) La courbe de f est une parabole d'axe $x = 3$ et de sommet $S(3, 4)$

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	$-\frac{9}{4}$	0	$\frac{7}{4}$	3	$\frac{15}{4}$



2) a) → La courbe $\mathscr{C}'$ coïncide avec $\mathscr{C}$ lorsque celle-ci est au-dessus de l'axe des abscisses
→ Les courbe $\mathscr{C}$ est $\mathscr{C}'$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses lorsque $\mathscr{C}$ est au-dessous de ce dernier.

c)

x	$-\infty$		-1		3		7		$+\infty$
f		↘	0	↗	4	↘	0	↗	

3) b) $\left|-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}\right| \geq \frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \Leftrightarrow g(x) \geq \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty,5] \cup [9,+\infty[$

Exercice 4

1) $f(0)=0$ donc $c=0$

$f(2)=4$ donc $4a+2b=4$

$f(4)=0$ donc $16a+4b=0$

$$\begin{cases}4a+2b=4\\16a+4b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a+b=2\\4a+b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=2-2a\\4a+(2-2a)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=2-2a\\2a+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=2-2a\\a=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=4\\a=-1\end{cases}$$

donc $\boxed{f(x)=-x^2+4x}$

2) a) → Soit $a,b \in]-\infty,3]$ tel que $a<b$

$a<b \Leftrightarrow a-3<b-3$

$\Leftrightarrow (a-3)^2 > (b-3)^2$ car $a<b<3$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a-3)^2 > \frac{1}{2}(b-3)^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a-3)^2+1 > \frac{1}{2}(b-3)^2+1$

$\Leftrightarrow g(a) > g(b)$

donc g est strictement décroissante sur $]-\infty,3]$

→ Soit $a,b \in [3,+\infty[$ tel que $a<b$

$a<b \Leftrightarrow a-3<b-3$

$\Leftrightarrow (a-3)^2 < (b-3)^2$ car $3<a<b$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a-3)^2 < \frac{1}{2}(b-3)^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a-3)^2+1 < \frac{1}{2}(b-3)^2+1$

$\Leftrightarrow g(a) < g(b)$

donc g est strictement croissante sur $[3,+\infty[$

b) La courbe $\mathscr{C}'$ de g est une parabole d'axe $x=3$ et de sommet $B(3,1)$

3) a) $\Delta : y = mx+p$

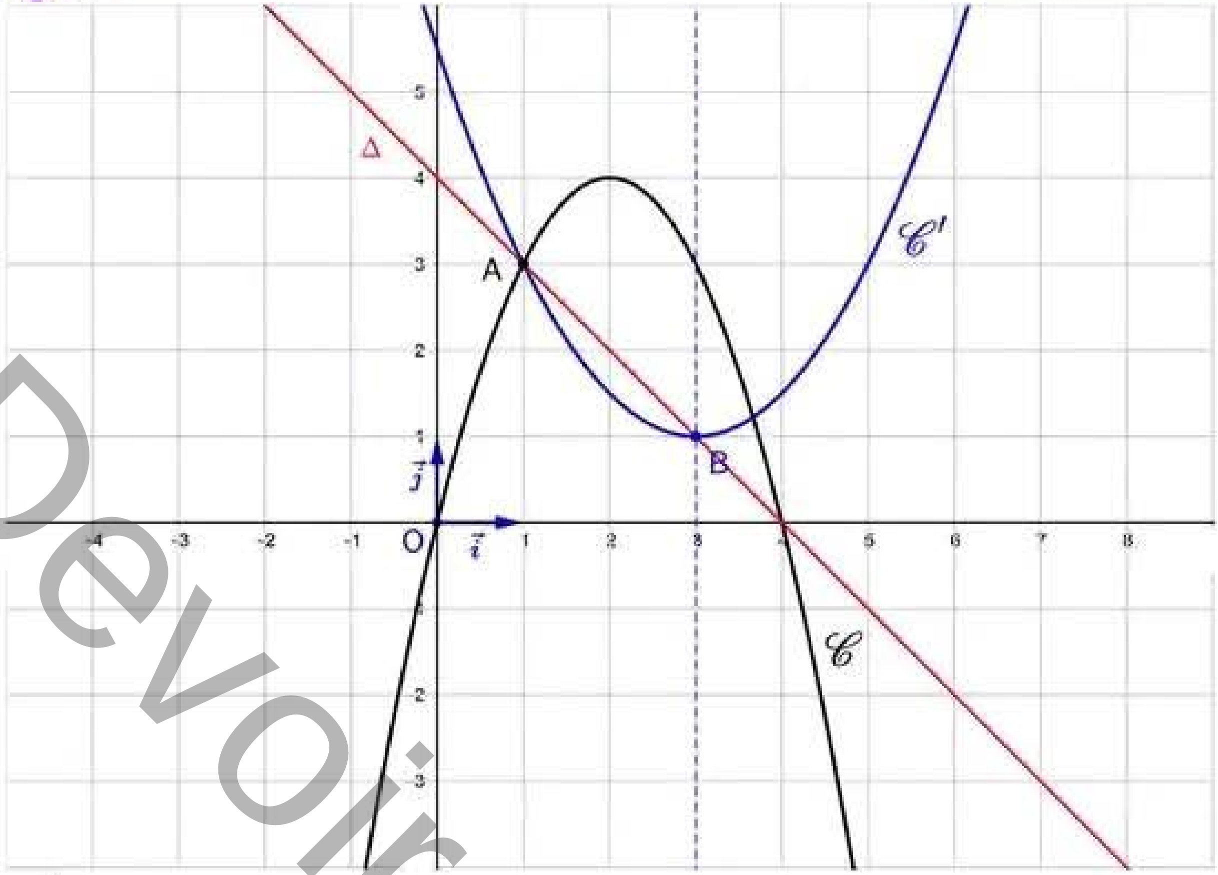
$m = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{1-3}{3-1} = -1$ donc $\Delta : y=-x+p$

$A \in \Delta \Leftrightarrow 3=-1+p \Leftrightarrow p=4$

donc $\boxed{\Delta : y=-x+4}$

b) $(S) : \begin{cases}4-x \leq f(x)\\4-x \leq g(x)\end{cases}$

Les solutions du système (S) sont les abscisses des points de Δ où celle-ci est au-dessous de $\mathscr{C}$ et au-dessous de $\mathscr{C}'$: $S_{\mathbb{R}} = [3,4]$



Exercice 5

1) $x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4 \Leftrightarrow x \in [-4,+\infty[$ donc $D_f = [-4,+\infty[$

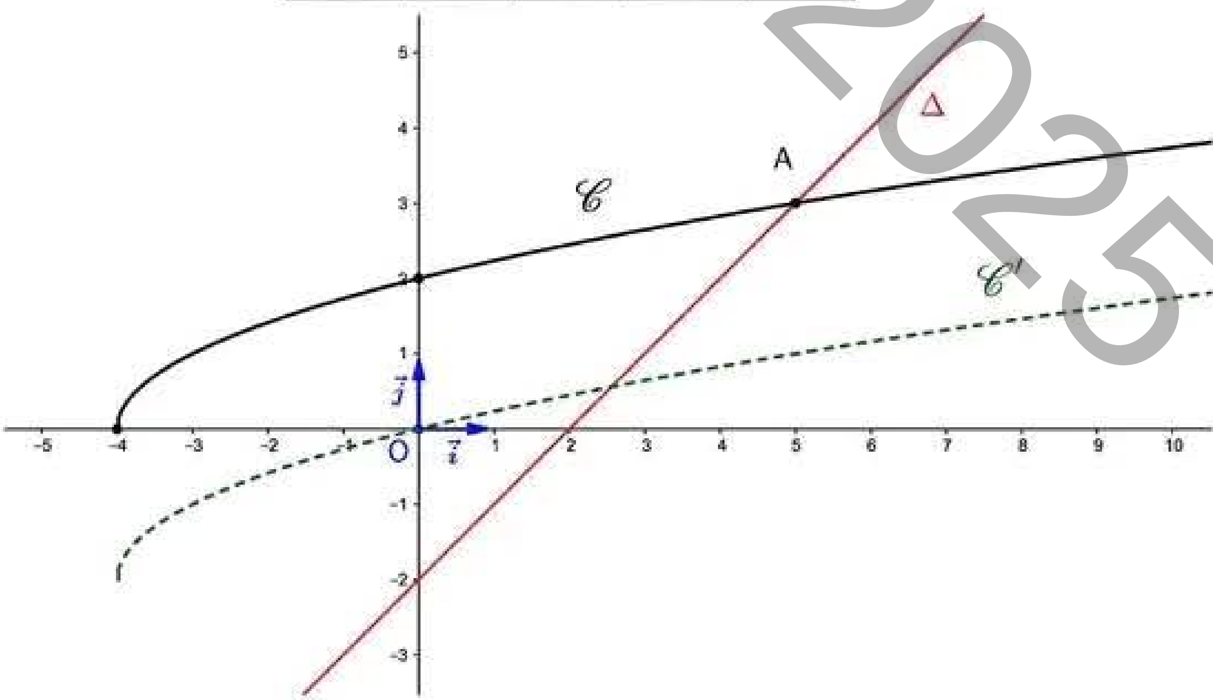
2) Soit $a,b \in [-4,+\infty[$ tel que $a < b$

$$-4 \leq a < b \Leftrightarrow 0 \leq a+4 < b+4$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{a+4} < \sqrt{b+4}$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq f(a) < f(b)$$

donc f est strictement croissante sur $[-4,+\infty[$

3) La courbe de f est une demi parabole de direction l'axe des abscisses.

x	−4	0	5	12
f(x)	0	2	3	4



4) b) $f(x)=x-2 \Leftrightarrow \sqrt{x+4}=x-2$

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	

$DE=[-4,+\infty[$

→ Si $x\in[-4,2[$, $\sqrt{x+4}=x-2<0$ impossible

→ Si $x\in[2,+\infty[$, $\sqrt{x+4}=x-2 \Leftrightarrow x+4=(x-2)^2$

$$\Leftrightarrow x+4=x^2-4x+4$$
$$\Leftrightarrow x^2-5x=0$$
$$\Leftrightarrow x(x-5)=0$$
$$\Leftrightarrow x=5 \text{ ou } x=0 \text{ (à rejeter)}$$

Δ coupe la courbe $\mathscr{C}$ au point $A=(5,f(5))=(5,3)$

5) a) Soit $x\in[-4,+\infty[$, $f(x)-2=\sqrt{x+4}-2=\dfrac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{\sqrt{x+4}+2}=\dfrac{x+4-4}{\sqrt{x+4}+2}=\dfrac{x}{\sqrt{x+4}+2}=g(x)$

b) La courbe $\mathscr{C}'$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation du vecteur $-2\vec{j}$

Exercice 6

1) La courbe $\mathscr{C}f$ de la fonction f est une parabole de sommet $S(0,-1)$ et d'axe $x=0$

x	0	1	2
$f(x)$	-1	2	11

2) a) Il faut que $x-1\neq 0$ c'est-à-dire $x\neq 1$ donc $Dg=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

b) La courbe représentative de g est une hyperbole d'asymptotes $x=1$ et $y=0$

Le centre de symétrie de $\mathscr{C}g$ est le point $I(1,0)$

c)

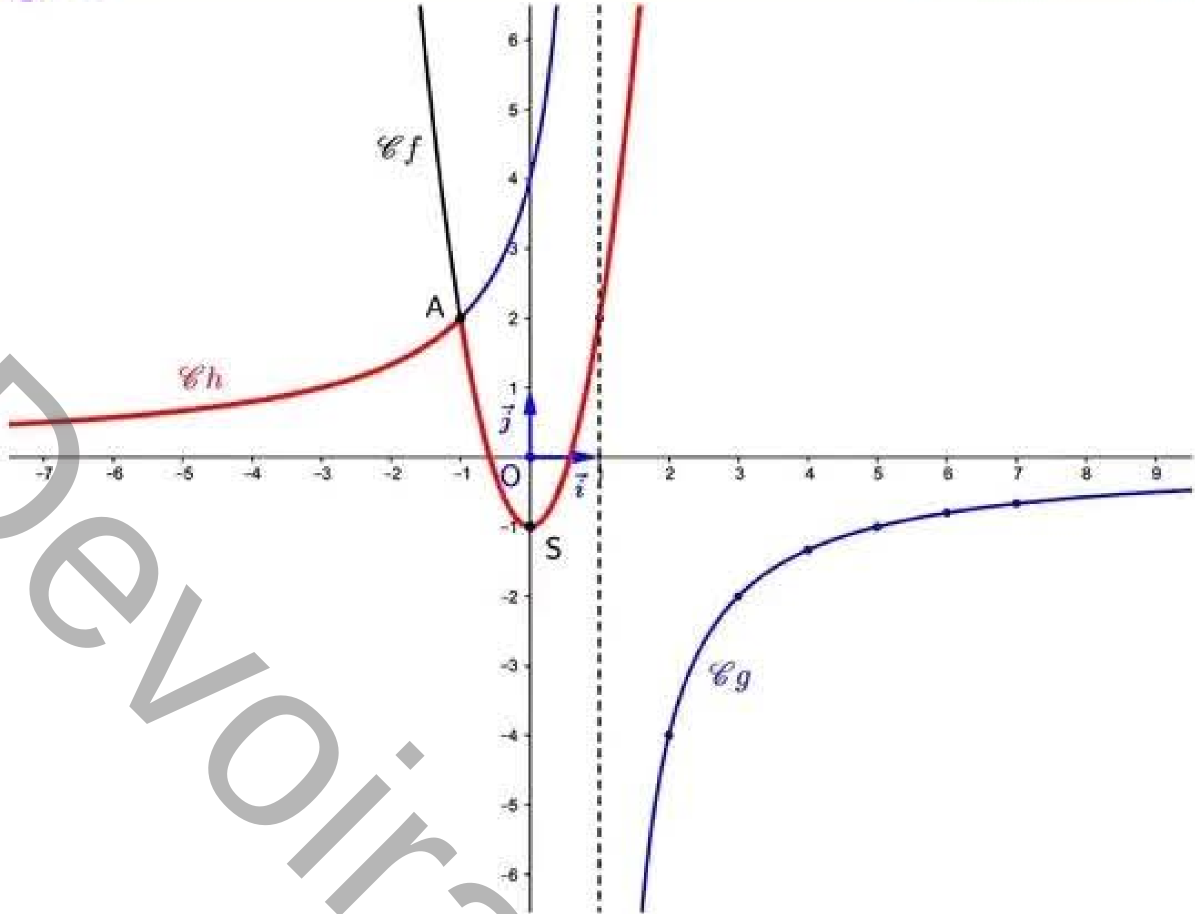
x	2	3	4
$g(x)$	-4	-2	$-\frac{4}{3}$

3) a) $A(-1,2)$

a) $g(x)\leq f(x)$ $\qquad S_{\mathbb{R}}=]-\infty,-1]$

4) b)

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
h		↗	2	↘	-1	↗	



Exercice 7

1) a) $D_f = \mathbb{R}^*$

Soit a et b deux réels distincts et non nuls.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{-\frac{4}{b}+\frac{4}{a}}{b-a} = \frac{\frac{b-a}{ab}}{b-a} = \frac{1}{ab}$$

→ Si $a,b \in]-\infty,0[$ alors $ab>0$ et par suite $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty,0[$

→ Si $a,b \in]0,+\infty[$ alors $ab>0$ et par suite $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>0$ donc f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↗	‖	↗

b) La courbe $\mathscr{C}$ est une hyperbole d'asymptotes $x=0$ et $y=0$

x	1	2	3	4
$f(x)$	-4	-2	$-\frac{4}{3}$	-1

2) b) **Graphiquement** : Δ coupe $\mathscr{C}$ au points $A(4,-1)$ et $B(1,-4)$

Par le calcul : Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = x-5 \Leftrightarrow -\frac{4}{x} = x-5$

$\Leftrightarrow -4 = x^2-5x$

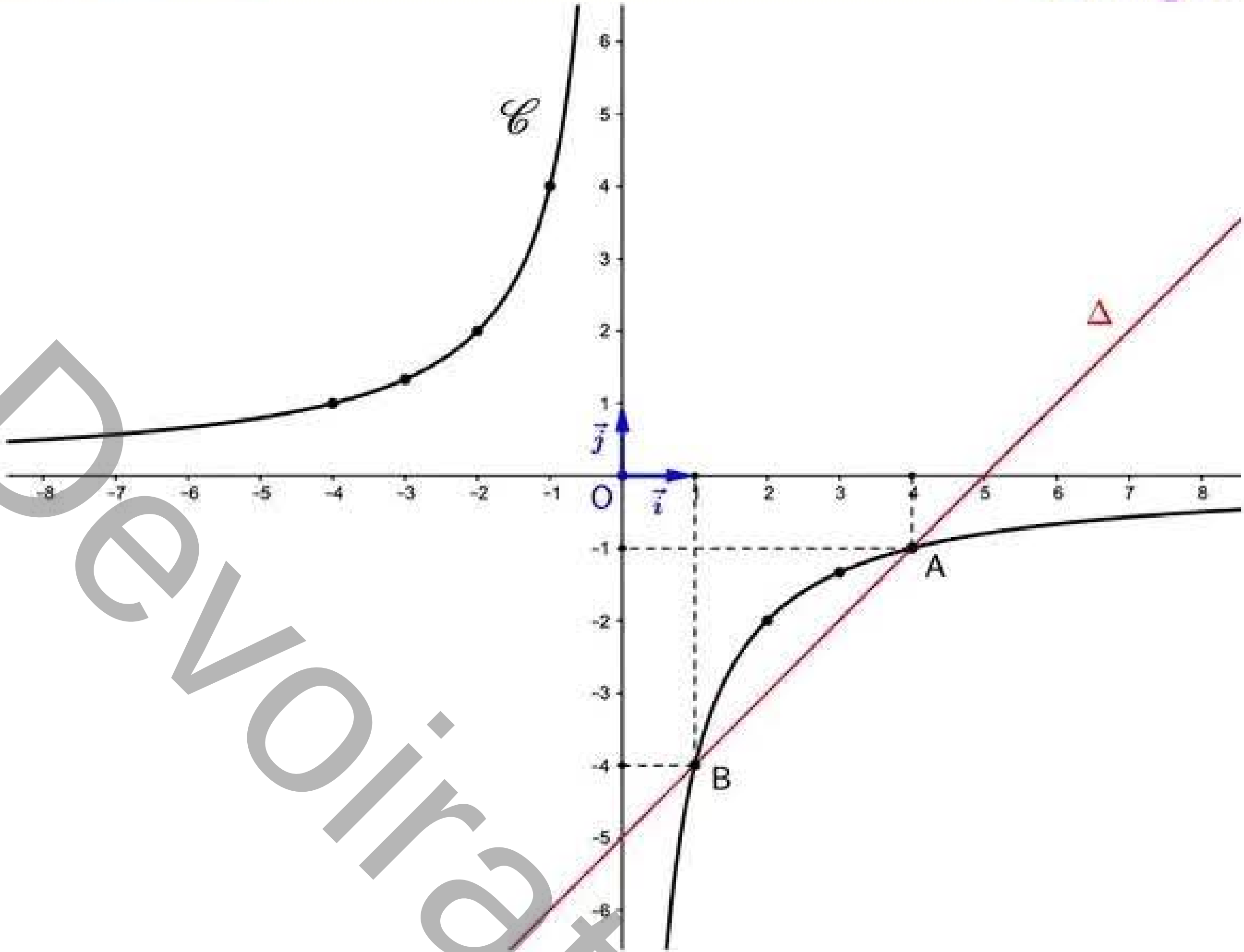
$\Leftrightarrow x^2-5x+4=0$

$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=4$

Δ coupe $\mathscr{C}$ au points $A(4,f(4))=(4,-1)$ et $B(1,f(1))=(1,-4)$

c) $\frac{4}{x}+x<5 \Leftrightarrow x-5<-\frac{4}{x} \Leftrightarrow x-5<f(x)$

$S_{\mathbb{R}} =]1,4[$



Exercice 8

1) a) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $3 + \frac{3}{x-2} = \frac{3(x-2)}{x-2} + \frac{3}{x-2} = \frac{3x-6+3}{x-2} = \frac{3x-3}{x-2} = f(x)$

b) → Soit $a,b \in]-\infty,2[$ tel que $a < b$

$$a < b \Leftrightarrow a-2 < b-2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{b-2} < \frac{1}{a-2} \text{ car } a-2 < b-2 < 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{b-2} < \frac{3}{a-2}$$
$$\Leftrightarrow 3+\frac{3}{b-2} < 3+\frac{3}{a-2}$$
$$\Leftrightarrow f(b) < f(a)$$

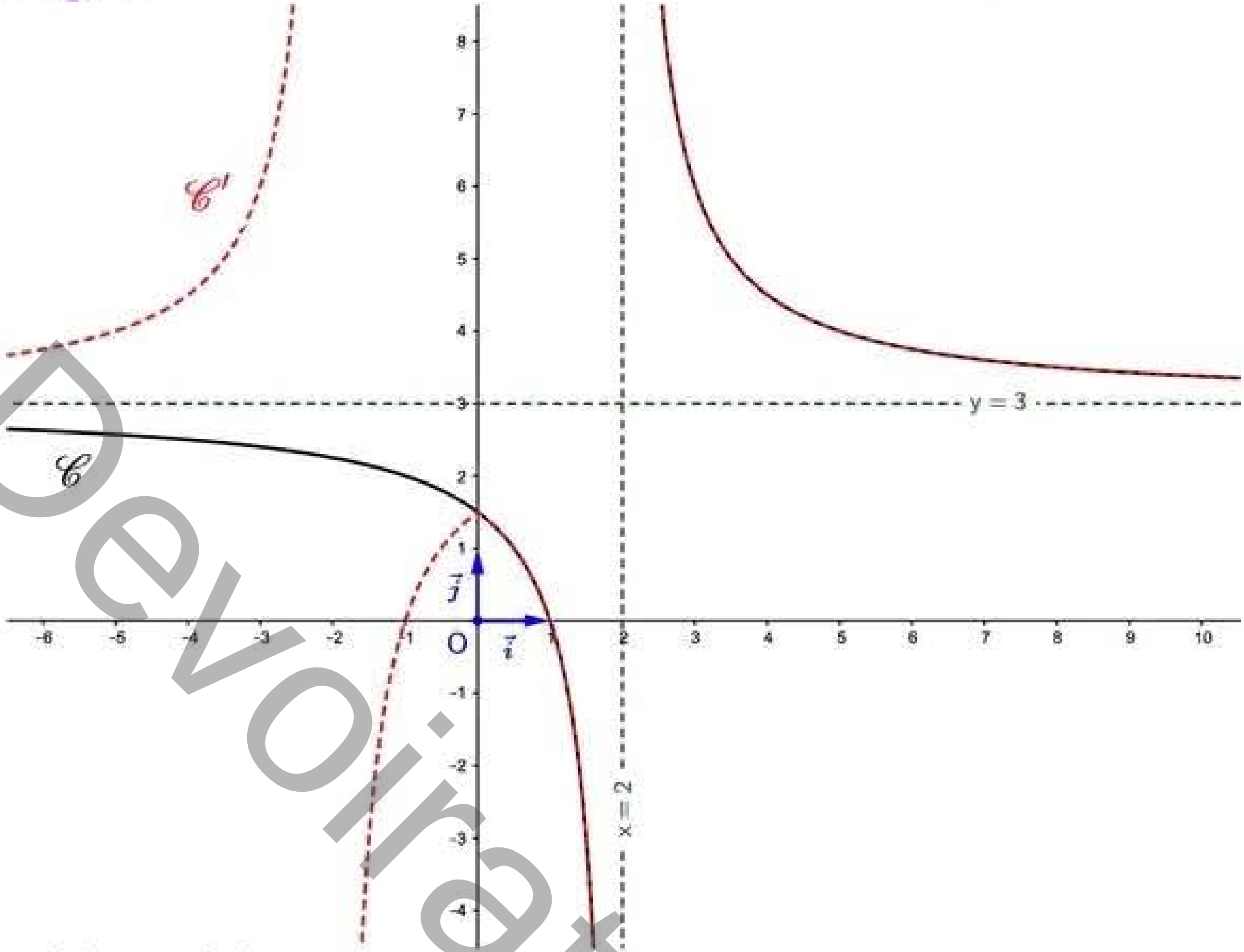
donc f est strictement décroissante sur $]-\infty,2[$

→ Soit $a,b \in]2,+\infty[$ tel que $a < b$

$$a < b \Leftrightarrow a-2 < b-2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{b-2} < \frac{1}{a-2} \text{ car } 0 < a-2 < b-2$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{b-2} < \frac{3}{a-2}$$
$$\Leftrightarrow 3+\frac{3}{b-2} < 3+\frac{3}{a-2}$$
$$\Leftrightarrow f(b) < f(a)$$

donc f est strictement décroissante sur $]2,+\infty[$

2) $\mathscr{C}$ est une hyperbole d'asymptotes $x = 2$ et $y = 3$



3) a) $|x|-2=0 \Leftrightarrow |x|=2 \Leftrightarrow x=-2$ ou $x=2$ donc $Dg=\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$

b) → $x \in Dg \Leftrightarrow x \neq -2$ et $x \neq 2 \Leftrightarrow -x \neq 2$ et $-x \neq -2 \Leftrightarrow -x \in Dg$

→ $g(-x)=\dfrac{3|-x|-3}{|-x|-2}=\dfrac{3|x|-3}{|x|-2}=g(x)$ pour tout $x \in Dg$

donc g est une fonction paire.

c) Si $x \geq 0$ alors $|x|=x$ et par suite $g(x)=\dfrac{3|x|-3}{|x|-2}=\dfrac{3x-3}{x-2}=f(x)$

4) a) → à droite de l'axe des ordonnées (pour $x \geq 0$) $g(x)=f(x)$ donc $\mathscr{C}'$ coïncide avec $\mathscr{C}$

→ g est paire donc $\mathscr{C}'$ est symétrique par rapport à l'axe de ordonnées et par suite la partie de $\mathscr{C}'$ qui se trouve à gauche de l'axe des ordonnées est la symétrique de la partie qui se trouve à droite de l'axe des ordonnées.

Exercice 9

1) a) Il faut que $x+2 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq -2$ donc $Df=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

b) $\mathscr{C}f$ passe par $A(0,1)$ donc $f(0)=1 \Leftrightarrow a+\dfrac{1}{2}b=1$

$\mathscr{C}f$ passe par $B(2,2)$ donc $f(2)=2 \Leftrightarrow a+\dfrac{1}{4}b=2$

$$\begin{cases} a+\frac{1}{2}b=1 \\ a+\frac{1}{4}b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-\frac{1}{2}b \\ a+\frac{1}{4}b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-\frac{1}{2}b \\ 1-\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-\frac{1}{2}b \\ -\frac{1}{4}b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-\frac{1}{2}b \\ b=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-4 \end{cases}$$

donc $\boxed{f(x)=3-\dfrac{4}{x+2}}$

2) a) → Soit $a,b \in]-\infty,-2[$ tel que $a<b$

$a<b \Leftrightarrow a+2<b+2$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{b+2}<\dfrac{1}{a+2}$ ($a+2$ et $b+2$ sont de même signe)

$\Leftrightarrow -\dfrac{4}{b+2}>-\dfrac{4}{a+2}$

$$\Leftrightarrow 3-\frac{4}{b+2} > 3-\frac{4}{a+2}$$
$$\Leftrightarrow f(b) > f(a)$$

donc f est strictement croissante sur $]-\infty,-2[$

→ Soit $a,b \in]-2,+\infty[$ tel que $a < b$

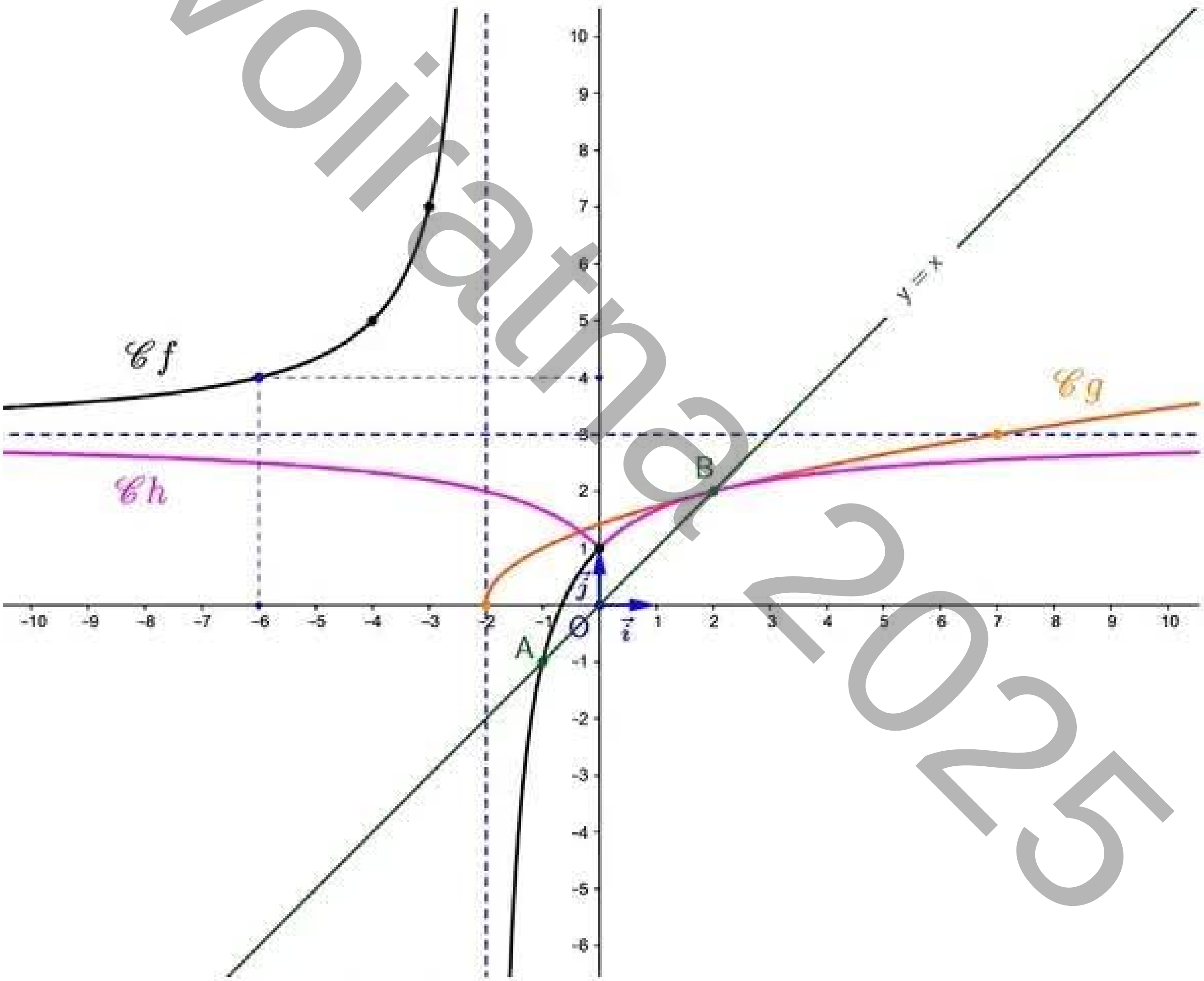
$a < b \Leftrightarrow a+2 < b+2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b+2} < \frac{1}{a+2} \quad (a+2 \text{ et } b+2 \text{ sont de même signe})$$
$$\Leftrightarrow -\frac{4}{b+2} > -\frac{4}{a+2}$$
$$\Leftrightarrow 3-\frac{4}{b+2} > 3-\frac{4}{a+2}$$
$$\Leftrightarrow f(b) > f(a)$$

donc f est strictement croissante sur $]-2,+\infty[$

b) $f(x) = 3-\frac{4}{x+2} = \frac{3x+6-4}{x+2} = \frac{3x+2}{x+2}$ donc $\mathscr{C}f$ est un hyperbole d'asymptotes $x=-2$ et $y=3$

x	-6	-4	-3	-1	0	2
$f(x)$	4	5	7	-1	1	2



3) a) $1 < f(x) < 4$ $\quad S_{\mathbb{R}} =]-\infty,-6[\cup]0,+\infty[$

b) Pour $x \neq -2$, $f(x) = x \Leftrightarrow 3-\frac{4}{x+2} = x$

$$\Leftrightarrow 3-x = \frac{4}{x+2}$$
$$\Leftrightarrow (3-x)(x+2) = 4$$
$$\Leftrightarrow -x^2+x+6 = 4$$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 2$

donc Δ coupe $\mathscr{C}f$ aux points $A(-1,-1)$ et $B = (2,2)$

4) a) Il faut que $x + 2 \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq -2$ donc $Dg = [-2,+\infty[$

La courbe $\mathscr{C}g$ est une demi-parabole de direction l'axe des abscisses.

x	−2	2	7
g(x)	0	2	3

b) Pour $x > -2$, $3x+2-(x+2)\sqrt{x+2} < 0 \Leftrightarrow 3x+2 < (x+2)\sqrt{x+2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x+2}{x+2} < \sqrt{x+2}$

$\Leftrightarrow f(x) < g(x)$

$S_{\mathbb{R}} =]-2,2[\cup]2,+\infty[$

5) a) $|x| + 2 = 0 \Leftrightarrow |x| = -2$ impossible donc $Dh = \mathbb{R}$

→ Si $x \in \mathbb{R}$ alors $-x \in \mathbb{R}$

→ $h(-x) = \dfrac{3|-x|+2}{|-x|+2} = \dfrac{3|x|+2}{|x|+2} = h(x)$

donc h est une fonction paire et par suite $\mathscr{C}h$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

b) Sur $[0,+\infty[$, $h(x) = \dfrac{3x+2}{x+2} = f(x)$ donc $\mathscr{C}h$ coïncide avec $\mathscr{C}f$

Exercice 10

1) a) $2x - 5 = 0 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$ donc $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{5}{2}\right\}$

b) Soit $x \in D$ alors $2 + \dfrac{3}{2x-5} = \dfrac{2(2x-5)+3}{2x-5} = \dfrac{4x-7}{2x-5} = f(x)$

c) → Soit $a,b \in \left]-\infty,\dfrac{5}{2}\right[$ tel que $a < b$ alors $2a-5 < 0$ et $2b-5 < 0$

$a < b \Leftrightarrow 2a < 2b$

$\Leftrightarrow 2a-5 < 2b-5$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2b-5} < \dfrac{1}{2a-5}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2b-5} < \dfrac{3}{2a-5}$

$\Leftrightarrow 2 + \dfrac{3}{2b-5} < 2 + \dfrac{3}{2a-5}$

$\Leftrightarrow f(b) < f(a)$

donc f est strictement décroissante sur $\left]-\infty,\dfrac{5}{2}\right[$

→ Soit $a,b \in \left]\dfrac{5}{2},+\infty\right[$ tel que $a < b$ alors $2a-5 > 0$ et $2b-5 > 0$

$a < b \Leftrightarrow 2a < 2b$

$\Leftrightarrow 2a-5 < 2b-5$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2b-5} < \dfrac{1}{2a-5}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2b-5} < \dfrac{3}{2a-5}$

$\Leftrightarrow 2 + \dfrac{3}{2b-5} < 2 + \dfrac{3}{2a-5}$

$\Leftrightarrow f(b) < f(a)$

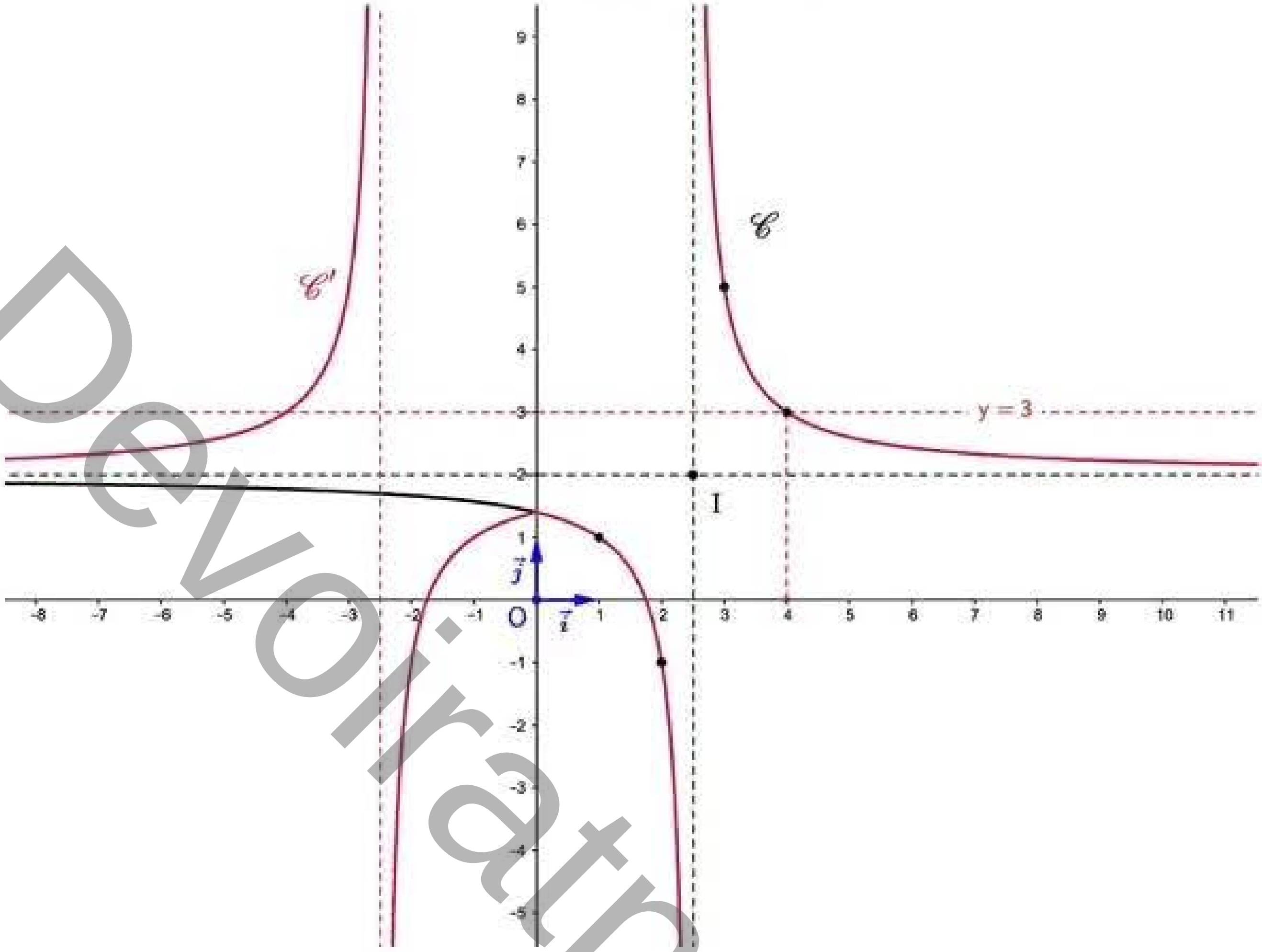
donc f est strictement décroissante sur $\left]\dfrac{5}{2},+\infty\right[$

2) a) $\mathscr{C}$ est une hyperbole d'asymptotes $x = \dfrac{5}{2}$ et $y = 2$

Le point $I\left(\dfrac{5}{2},2\right)$ (l'intersection de ses deux asymptotes) est le centre de symétrie de $\mathscr{C}$

b)

x	1	2	3	4
f(x)	1	−1	5	3



3) $f(x) \geq 3 \qquad S_{\mathbb{R}} = \left]\frac{5}{2}, 4\right]$

4) a) $2|x| - 5 = 0 \Leftrightarrow |x| = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$ ou $x = \frac{5}{2}$ donc $Dg = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\}$

→ $x \in Dg \Leftrightarrow x \neq -\frac{5}{2}$ et $x \neq \frac{5}{2} \Leftrightarrow -x \neq \frac{5}{2}$ et $-x \neq -\frac{5}{2} \Leftrightarrow -x \in Dg$

→ $g(-x) = \frac{4|-x| - 7}{2|-x| - 5} = \frac{4|x| - 7}{2|x| - 5} = g(x)$ pour tout $x \in Dg$

donc g est une fonction paire et par suite sa courbe $\mathscr{C}'$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

b) Sur $\left[0, \frac{5}{2}\right[\cup \left]\frac{5}{2}, +\infty\right[$, $g(x) = f(|x|) = f(x)$ donc $\mathscr{C}'$ coïncide avec $\mathscr{C}$