Géométrie analytique

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit les points $A(-2,3)$, $B(1,-2)$ et $C(2,5)$

1) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés
2) Déterminer les coordonnées du point G barycentre de $(A,-2)$ et $(B,3)$
3) a) Ecrire une équation cartésienne de la droite Δ passant par C et parallèle à (AB)
   b) Trouver les coordonnées du point $A' = t_{\vec{u}}(A)$ où $\vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$
   c) Vérifier que $A' \in \Delta$ et en dédire l'image de la droite (AB) par $t_{\vec{u}}$

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit les points $A(-1,0)$ et $B(2,2)$

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB)
2) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ passant par le point C milieu de $[AB]$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 2\vec{j}$
3) On considère les points $G(1,-1)$ et $D(2,b)$ ou b est un réel.
   a) Vérifier que $G \in \Delta$ et déterminer la valeur de b pour que $D \in \Delta$
   b) Montrer alors que G est le centre de gravité du triangle ABD.
4) Soit Δ_m l'ensemble des points $M(x,y)$ tel que $(2m-4)x + (m-1)y + 3 - m = 0$ où m est un nombre réel.
   a) Montrer que pour tout réel m, Δ_m est une droite.
   b) Montrer que les droites Δ_m passent par un point fixe I que l'on déterminera.
   c) Déterminer m pour que $\Delta_m \perp (AB)$

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère les droites $\Delta : 2x + y - 2 = 0$ et $\Delta' : 4x + y + 2 = 0$

1) Montrer que les droites Δ et Δ' sont sécantes en un point A dont on déterminera les coordonnés.
2) Soit $\Delta_m : (m+1)x + (m+5)y - m + 7 = 0$
   a) Montrer que pour tout réel m, Δ_m passe par un point B dont on déterminera les coordonnées.
   b) Pour quelle valeur de m, Δ_m passe par le point $C(1,4)$
   c) Pour quelle valeur de m, Δ_m est parallèle à Δ
   d) Pour quelle valeur de m, Δ_m est perpendiculaire à Δ

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit Δ_m l'ensemble des points $M(x,y)$ tel que $(m-1)x + my + 3m - 1 = 0$ où m est un paramètre réel.

1) a) Montrer que pour tout réel m, Δ_m est une droite.
   b) Montrer que Δ_2 est parallèle à la droite $\mathcal{D} : x + 2y + 6 = 0$ et perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}' : 2x - y + 1 = 0$
2) Montrer que les droites Δ_m passent par un point fixe I que l'on déterminera
3) On donne les points $A(0,2)$ et $B(-2,2)$. Montrer que la droite Δ_0 est la médiatrice de $[AB]$
4) Montrer que si $d(O,\Delta_m) = 1$ alors $m = 0$ ou bien $m = \frac{4}{7}$

Exercice 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère le point $A(2,-3)$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

1) Ecrire une équation cartésienne de la droite Δ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$
2) Déterminer l'équation cartésienne de la droite Δ' passant par A et perpendiculaire à la droite Δ
3) Soit la droite $\mathcal{D} : 3x + 2y = 0$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{D}$ et Δ
4) Soit $\Delta_m : (m-3)x + (m-2)y + m = 0$ où m est un paramètre réel.
   a) Montrer que pour tout réel m, Δ_m est une droite.
   b) Montrer que pour tout réel m, la droite Δ_m passe par un point fixe qu'on déterminera.
5) Pour quelles valeurs de m la droite Δ_m est globalement invariante par la translation de vecteur $\vec{u}$?

Exercice 6

Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère les points $A(-2,2)$, $B(2,4)$ et $D(0,-2)$

1) a) Montrer que le triangle ABD est isocèle rectangle en A.
   b) Calculer les coordonnées du point K milieu de $[BD]$
   c) En déduire l'équation du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABD
2) Soit $\mathscr{C}'$ l'ensemble des points $M(x,y)$ tel que : $x^2+y^2+4x-2y-15=0$
   a) Montrer que l'ensemble $\mathscr{C}'$ est un cercle dont on précisera le centre I et le rayon R.
   b) Donner une équation de la droite T tangente à $\mathscr{C}'$ au point $E(2,3)$
3) Déterminer la position relative du cercle $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{C}'$

Exercice 7

Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit les points $B(2,5)$, $C(-4,3)$ et $I(-1,4)$

1) a) Ecrire l'équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon $R=\sqrt{10}$
   b) Montrer que $[BC]$ est un diamètre du cercle $\mathscr{C}$
2) Ecrire une équation cartésienne de la tangente Δ à $\mathscr{C}$ au point B.
3) Le cercle $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées en deux points A' et B'
   a) Déterminer les coordonnés des points A' et B' (On suppose que $y_{A'}<y_{B'}$)
   b) Montrer que la droite $\Delta':x-3y+3=0$ est tangente à $\mathscr{C}$ en A'
4) Soit l'ensemble $\mathscr{C}'=\{M(x,y)\in\mathscr{P}$ tel que $x^2+y^2-4x-2y+1=0\}$
   a) Montrer que l'ensemble $\mathscr{C}'$ est un cercle dont on précisera le centre J et le rayon R'
   b) Montrer que $\mathscr{C}'$ et Δ' se coupent en deux points dont on déterminera les coordonnées.
5) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$

Exercice 8

Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit les points $A(2,-1)$ et $B(4,1)$

1) Déterminer l'équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$
2) Donner une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ médiatrice de $[AB]$
3) On donne la droite $\mathscr{D}':x+y-3=0$, déterminer les coordonnées des points d'intersections de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}'$
4) Déterminer l'ensemble E des points $M(x,y)$ tel que $2AM^2-BM^2=9$

Exercice 9

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A(2,6)$ et $B(6,2)$

1) Montrer que le triangle OAB est isocèle.
2) Trouver une équation cartésienne de la droite Δ passant par O et perpendiculaire à (AB).
3) Trouver une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[OA]$.
4) Le cercle $\mathscr{C}$ coupe la droite (OB) en A'. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AA')
5) Soit H le point d'intersection des droites Δ et (AA')
   a) Que représente H pour le triangle OAB ?
   b) Déterminer les coordonnées du point H.

Exercice 10

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère les points $A(3,2)$ et $B(2,-1)$

1) a) Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice Δ de $[AB]$
   b) Construire les droites Δ et $\mathscr{D}$ d'équation $y=2x-1$
   c) Construire le cercle $\mathscr{C}$ passant par A et B et dont le centre I appartient à la droite $\mathscr{D}$
2) a) Déterminer les coordonnées du point I et le rayon du cercle $\mathscr{C}$
   b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$
3) Donner une équation de la tangente en A et $\mathscr{C}$

Exercice 11

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Montrer que $\mathscr{C}:x^2+y^2-2x-2y-3=0$ est un cercle dont on précisera le centre I et le rayon r.
2) Montrer que les points $A(0,-1)$ et $B(-1,2)$ sont sur ce cercle.
3) Déterminer les équations des tangentes respectivement A et en B au cercle $\mathscr{C}$
4) On appelle P le point d'intersection de ces tangentes. Montrer que (PI) est la médiatrice de $[AB]$

Exercice 12

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère le cercle $\mathscr{C} : x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ et la droite $\mathscr{D} : x + y - 2 = 0$

1) a) Déterminer le centre I et le rayon R de $\mathscr{C}$
   b) Montrer que $\mathscr{D}$ coupe $\mathscr{C}$ en deux points A et B.
   c) Déterminer les coordonnées des points A et B.
2) Soit H le projeté orthogonale de I sur $\mathscr{D}$
   a) Montrer que H est le milieu de $[AB]$
   b) En déduire les coordonnées de H.

Exercice 13

Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on donne $A(-3,0)$, $B(3,3)$ et $C(0,4)$

1) Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2) Calculer les distances AB, AC et BC
3) Déterminer en utilisant théorème d'EL-Kashi une mesure en radian de l'angle $\widehat{ABC}$
4) Calculer alors le rayon R du cercle circonscrit au triangle ABC.
5) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ passant par C et perpendiculaire à (AB)
6) Soit $M(2\alpha, 4-4\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
   a) Vérifier que $M \in \Delta$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$
   b) Pour quelle valeur de α le point M appartient-il à (AB)
7) Soit Δ' la droite qui porte la hauteur issue de B du triangle ABC.
   a) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ'
   b) Trouver alors les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC.

Exercice 14

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de centre $I(3,2)$ et de rayon $R = \sqrt{5}$
2) a) Vérifier que $A(4,4) \in \mathscr{C}$
   b) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ tangente à $\mathscr{C}$ en A.
   c) Calculer les coordonnées du point B intersection de Δ avec l'axe des ordonnées.
3) Soit J le milieu de $[AB]$ et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $2x - y + 1 = 0$
   a) Calculer les coordonnées du point J.
   b) Montrer que la droite $\mathscr{D}$ est la médiatrice de $[AB]$
   c) Montrer que la droite $\mathscr{D}$ est tangente à $\mathscr{C}$
4) Déterminer l'ensemble E des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 100$

Exercice 15

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan. On donne les points $A(-2,-1)$ et $B(2,3)$

1) Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M tels que $MA^2 + 3MB^2 = AB^2$
   a) Montrer que $\mathscr{C}$ est un cercle dont on déterminera le centre I et le rayon R.
   b) Montrer que I est le barycentre de $(A,1)$ et $(B,3)$
2) Le cercle $\mathscr{C}$ coupe la droite $(O,\vec{j})$ en deux points E et F. (On convient que $y_E < y_F$)
   a) Trouver les coordonnées de E et F.
   b) Ecrire une équation cartésienne de la droite Δ tangente à $\mathscr{C}$ en F.
   c) Montrer que $\Delta \,//\, (AB)$
3) Ecrire une équation de l'autre tangente parallèle à (AB)

Exercice 16

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan, $A(2,-1)$ et la droite $\Delta : x + y + 1 = 0$

1) a) Ecrire une équation cartésienne de la droite Δ' perpendiculaire à Δ et passant par A.
   b) Déterminer les coordonnés du point B intersection de Δ et Δ'
2) Soit l'ensemble $\mathscr{C} = \{M(x,y) \in \mathscr{P} \,/\, x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0\}$
   a) Montrer que $\mathscr{C}$ est un cercle de centre $I(3,0)$ et de rayon $R = 2\sqrt{2}$
   b) Montrer que Δ est tangente à $\mathscr{C}$
3) a) Montrer que le point $E(3,4)$ est à l'extérieur de $\mathscr{C}$
   b) Ecrire les équations des tangentes à $\mathscr{C}$ passant par E.

Exercice 17

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan $A(-1,4)$, $B(0,2)$ et la droite $\mathcal{D}: y=-2x-3$

1) Montrer que (AB) et $\mathcal{D}$ sont parallèles.
2) a) Ecrire une équation cartésienne de la droite Δ passant par A et perpendiculaire à $\mathcal{D}$
   b) Calculer les coordonnées du point C intersection de $\mathcal{D}$ et Δ
3) a) Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.
   b) Ecrire une équation du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC.
4) Soit $\mathscr{C}'$ l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan tels que $x^2+y^2+x-y-2=0$
   a) Montrer que $\mathscr{C}'$ est un cercle dont on précisera le centre I' et le rayon R'
   b) Montrer que $\mathscr{C}'$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation $t_{\vec{AB}}$

Exercice 18

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan $A(2,0)$ et la droite $\mathcal{D}: 3x+y+4=0$

1) Déterminer les coordonnés du point H projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$
2) Soit K le point de $\mathcal{D}$ d'abscisse -2. Montrer que le cercle $\mathscr{C}: x^2+y^2-2y-4=0$ est le cercle circonscrit au triangle AHK.
3) Soit le point $E(-1,-2)$
   a) Montrer que E est à l'extérieur de $\mathscr{C}$
   b) Ecrire les équations cartésiennes des tangentes à $\mathscr{C}$ passant par E.

Exercice 19

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on donne les points $A(-2,0)$, $B(3,0)$, $C\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ et $D(-1,-2)$

1) a) Montrer que ABD et ABC sont deux triangles rectangles respectivement en D et C.
   b) En déduire que A, B, C et D sont des points d'un même cercle $\mathscr{C}$ qu'on précisera.
   c) Ecrire une équation cartésienne de $\mathscr{C}$
2) a) Ecrire les équations cartésiennes des droites (BC), (AD), (AC) et (BD)
   b) On pose $\{E\}=(BC)\cap(AD)$ et $\{F\}=(AC)\cap(BD)$. Déterminer les coordonnées des points E et F puis montrer que $(EF)\perp(AB)$
   c) Faire une figure.
3) Soit $\Delta_m: 3x+4y+m=0$ où m est un paramètre réel. Pour quelles valeurs de m, Δ_m est tangents à $\mathscr{C}$.
4) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}'=h_{(A,2)}(\mathscr{C})$

Exercice 20

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On désigne par $\mathscr{C}_m$ l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan tels que $x^2+y^2+2(m+2)x+2(m-1)y+6m-1=0$ où m est un nombre réel.

1) a) Montrer que $\mathscr{C}_m$ est un cercle pour tout réel m dont-on précisera le centre I_m et le rayon R_m
   b) Montrer que I_m est un point de la droite $\mathcal{D}: x-y+3=0$
2) a) Donner les coordonnées du centre I_1 et du rayon R_1 du cercle $\mathscr{C}_1$
   b) Vérifier que $A(-2,\sqrt{3})$ appartient à $\mathscr{C}_1$ puis écrire une équation cartésienne de la tangente Δ à $\mathscr{C}_1$ en A
3) On donne la droite $\Delta_m: 3x-4y+m-1=0$ où m est un paramètre réel. Déterminer m pour que Δ_m soit tangente à $\mathscr{C}_1$

Exercice 21

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On désigne par $\mathscr{C}_m$ l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan tels que $x^2+y^2-2mx+2(2-m)y-2m-1=0$ où m est un paramètre réel.

1) Montrer que, pour tout réel m, $\mathscr{C}_m$ est un cercle.
2) a) Montrer que tous les cercles $\mathscr{C}_m$ passent par deux points fixes A et B.
   b) En déduire que les centres I_m des cercles $\mathscr{C}_m$ appartiennent à une même droite $\mathcal{D}$ dont on donnera l'équation réduite.

Exercice 1

1) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ donc $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix}3 & 4\\-5 & 2\end{vmatrix}=3\times2-(-5)\times4=26\neq0$

donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) G est le barycentre des points pondérés $(A,-2)$ et $(B,3)$ donc $\begin{cases}x_G=\dfrac{-2x_A+3x_B}{1}=4+3=7\\ y_G=\dfrac{-2y_A+3y_B}{1}=-6-6=-12\end{cases}$

donc $G(7,-12)$

3) a) $\Delta\ //\ (AB)$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ et par suite une équation cartésienne de cette dernière s'écrit sous la forme $-5x-3y+c=0$

d'autre part $C\in\Delta$ donc $-5\times2-3\times5+c=0$ et par suite $\Leftrightarrow c=25$

donc $\Delta: -5x-3y+25=0$

b) Soit $A'(x',y')$ alors $A'=t_{\vec u}(A)\Leftrightarrow\overrightarrow{AA'}=\vec u\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x'+2\\y'-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x'+2=7\\y'-3=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=5\\y'=0\end{cases}$

donc $A'(5,0)$

c) $-5\times5-3\times0+25=-25+25=0$ donc $A'\in\Delta$

$t_{\vec u}((AB))$ est la droite passant par A' et parallèle à (AB) donc $t_{\vec u}((AB))=\Delta$

Exercice 2

1) **Méthode 1 :**

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

Soit $M(x,y)$ alors $\overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix}x+1\\y\end{pmatrix}$

$M\in(AB)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

$\Leftrightarrow\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})=0$

$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x+1 & 3\\y & 2\end{vmatrix}=2(x+1)-3y=2x-3y+2=0$

donc $(AB): 2x-3y+2=0$

Méthode 2 :

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) donc une équation cartésienne de cette dernière s'écrit sous la forme $2x-3y+c=0$

d'autre part $A\in(AB)$ donc $2\times(-1)+3\times0+c=0$ donc $c=2$

donc $(AB): 2x-3y+2=0$

2) $\vec u=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ donc une équation cartésienne de cette dernière s'écrit sous la forme $-2x-\frac{1}{2}y+d=0$

C est le milieu de $[AB]$ donc $C\left(\frac{1}{2},1\right)$

Δ passe par C donc $-2\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times1+d=0$ c'est-à-dire $-\frac{3}{2}+d=0$ ou encore $d=\frac{3}{2}$

donc $\Delta: -2x-\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}=0$

ou encore en multipliant par -2, $\Delta: 4x+y-3=0$

3) a) $4\times1+(-1)-3=4-4=0$ donc $G(1,-1)$

$D\in\Delta\Leftrightarrow4\times2+b-3=0\Leftrightarrow5+b=0\Leftrightarrow b=-5$

b) $\dfrac{x_A+x_B+x_D}{3}=\dfrac{-1+2+2}{3}=1=x_G$ et $\dfrac{y_A+y_B+y_D}{3}=\dfrac{0+2-5}{3}=-1=y_G$ donc G est le centre de gravité du triangle ABD.

4) a) $\begin{cases}2m-4=0\\m-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=2\\m=1\end{cases}$ ce qui est impossible.

donc $2m-4$ et $m-1$ ne peuvent pas être pas tous les deux nuls et par suite Δ_m est une droite pour tout réel m.

b) $(2m-4)x+(m-1)y+3-m=0\Leftrightarrow 2mx-4x+my-y+3-m=0$

$$\Leftrightarrow m(2x+y-1)-4x-y+3=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y-1=0\\-4x-y+3=0\end{cases}$$

$L_1+L_2\Rightarrow -2x+2=0$ donc $x=1$

$L_1\Rightarrow 2+y-1=0$ donc $y=-1$

donc toutes les droites Δ_m passent par le point $I(1,-1)$

c) $\vec{n}=\begin{pmatrix}2m-4\\m-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite Δ_m

$\Delta_m\perp(AB)\Leftrightarrow\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

$$\Leftrightarrow\det(\vec{n},\overrightarrow{AB})=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}2m-4 & 3\\m-1 & 2\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow 4m-8-3m+3=0$$

$$\Leftrightarrow m-5=0$$

$$\Leftrightarrow m=5$$

Exercice 3

1) $\begin{cases}2x+y-2=0\\4x+y+2=0\end{cases}$

$L_2-L_1\Rightarrow 2x+4=0$ donc $x=-\dfrac{4}{2}=-2$

$L_1\Rightarrow 2\times(-2)+y-2=0$ donc $y-6=0$ ou encore $y=6$

et par suite Δ et Δ' sont sécantes au point $A(-2,6)$

2) a) Pour tout réel m, $(m+1)x+(m+5)y-m+7=0\Leftrightarrow mx+x+my+5y-m+7=0$

$$\Leftrightarrow m(x+y-1)+x+5y+7=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-1=0\\x+5y+7=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=1-x\\x+5y+7=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=1-x\\x+5(1-x)+7=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=1-x\\-4x+12=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=1-x\\x=3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=2\\x=3\end{cases}$$

donc Δ_m passe par le point $B(3,-2)$

b) Δ_m passe par le point $C(1,4)\Leftrightarrow(m+1)+4(m+5)-m+7=0$

$$\Leftrightarrow m+1+4m+20-m+7=0$$

$$\Leftrightarrow 4m+28=0$$

$$\Leftrightarrow m=-\frac{28}{4}=-7$$

c) $\vec{n}=\begin{pmatrix}m+1\\m+5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Δ_m et $\vec{n'}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Δ .

$\Delta_m \,//\, \Delta \Leftrightarrow \vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires.

$$\Leftrightarrow \det(\vec{n},\vec{n'}) = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} m+1 & 2 \\ m+5 & 1 \end{vmatrix} = m+1-2(m+5) = 0$$
$$\Leftrightarrow -9-m=0$$
$$\Leftrightarrow m=-9$$

d) $\Delta_m \perp \Delta \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n'}$

$$\Leftrightarrow 2\times(m+1)+1\times(m+5)=0$$
$$\Leftrightarrow 2m+2+m+5=0$$
$$\Leftrightarrow 3m+7=0$$
$$\Leftrightarrow m=-\frac{7}{3}$$

Exercice 4

1) a) $\begin{cases} m-1=0 \\ m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=0 \end{cases}$ ce qui est impossible donc $(m-1)$ et m ne peuvent pas être nuls en même temps et par suite Δ_m est une droite.

b) $\Delta_2 : x+2y+5=0$ donc un vecteur normal à Δ_2 est $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\vec{n}$ est normal aussi à $\mathscr{D}$ donc $\Delta_2 \,//\, \mathscr{D}$

$\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}'$

$2\times1+(-1)\times2=2-2=0$ donc $\vec{u}\perp\vec{n}$ et par suite $\Delta_2 \perp \mathscr{D}'$

2) $(m-1)x+my+3m-1=0 \Leftrightarrow mx-x+my+3m-1=0$

$$\Leftrightarrow m(x+y+3)-x-1=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3=0 \\ -x-1=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3=0 \\ x=-1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+2=0 \\ x=-1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x=-1 \end{cases}$$

donc toutes les droites Δ_m passent par le point $I(-1,-2)$

3) $\Delta_0 : -x-1=0$ donc $\vec{n_0}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Δ_0

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}=2\vec{n_0}$ donc $\overrightarrow{AB}$ est normal à Δ_0 et par suite $\Delta_0 \perp (AB)$

d'autre part le milieu de $[AB]$ est le point I donc d'après 2) Δ_0 passe par I et par suite Δ_0 est la médiatrice de $[AB]$

4) $d(O,\Delta_m)=\dfrac{|3m-1|}{\sqrt{(m-1)^2+m^2}}=\dfrac{|3m-1|}{\sqrt{2m^2-2m+1}}$

$2m^2-2m+1=0 \qquad \Delta=(-2)^2-4\times2=-4<0$

donc $2m^2-2m+1>0$ pour tout $m\in\mathbb{R}$

$$d(O,\Delta_m)=1 \Leftrightarrow \frac{|3m-1|}{\sqrt{2m^2-2m+1}}=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{|3m-1|^2}{2m^2-2m+1}=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{9m^2-6m+1}{2m^2-2m+1}=1$$
$$\Leftrightarrow 9m^2-6m+1=2m^2-2m+1$$
$$\Leftrightarrow 7m^2-4m=0$$

$\Leftrightarrow (7m-4)m=0$

$\Leftrightarrow m=0 \text{ ou } m=\frac{4}{7}$

Exercice 5

1) **Méthode 1 :**

Soit $M(x,y)$ alors $\overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix}x-2\\y+3\end{pmatrix}$

$\vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ alors $M\in\Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM},\vec{u})=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-2 & -1\\ y+3 & 5\end{vmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow 5x+y-7=0$$

donc $\Delta : 5x+y-7=0$

Méthode 2 :

$\vec{u}=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite Δ donc une équation cartésienne de cette dernière s'écrit sous la forme $5x+y+c=0$

d'autre part $A\in\Delta$ donc $5\times2+(-3)+c=0$ donc $c=-7$

et par suite $\Delta : 5x+y-7=0$

2) $\vec{u}$ est un vecteur normal à Δ' donc une équation cartésienne de cette dernière s'écrit sous la forme $-x+5y+d=0$

d'autre part $A\in\Delta'$ alors $-2+5\times(-3)+d=0$ ou encore $d=17$

donc $\Delta' : -x+5y+17=0$

3) $\begin{cases}5x+y-7=0\\3x+2y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=7-5x\\3x+2y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=7-5x\\3x+2(7-5x)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=7-5x\\-7x+14=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=7-5x\\x=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-3\\x=2\end{cases}$

donc les droites $\mathscr{D}$ et Δ se coupent en A.

4) a) Si $m-3=0$ alors $m=3$ et par suite $m-2=1\neq0$ donc $m-3$ et $m-2$ ne peuvent pas être nuls en même temps donc Δ_m est une droite pour tout $m\in\mathbb{R}$

b) $(m-3)x+(m-2)y+m=0 \Leftrightarrow mx-3x+my-2y+m=0$

$$\Leftrightarrow m(x+y+1)-3x-2y=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+y+1=0\\-3x-2y=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=-1-x\\-3x-2y=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=-1-x\\-3x-2(-1-x)=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=-1-x\\-x+2=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=-1-x\\x=2\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=-3\\x=2\end{cases}$$

donc Toutes les droite Δ_m passent par le point $A(2,-3)$

5) $\vec{n}=\begin{pmatrix}m-3\\m-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Δ_m

Δ_m est globalement invariante par la translation de vecteur $\vec{u} \Leftrightarrow \vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ_m

$$\Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{n}$$
$$\Leftrightarrow -1\times(m-3)+5\times(m-2)=0$$
$$\Leftrightarrow 4m-7=0$$
$$\Leftrightarrow m=\frac{7}{4}$$

Exercice 6

1) a) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$

$4\times 2+2\times(-4)=0$ donc $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ et par suite ABD est rectangle en A.

$AB=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$ et $AD=\sqrt{2^2+(-4)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=AB$ donc ABD est isocèle en A.

b) $x_K=\frac{2}{2}=1$ et $y_K=\frac{4+(-2)}{2}=1$ donc $K(1,1)$

c) $AK=\sqrt{(-2-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{10}$

Le cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABD est le cercle de centre K et de rayon $AK=\sqrt{10}$

donc $\mathscr{C}:(x-1)^2+(y-1)^2=10$

2) a) $x^2+y^2+4x-2y-15=0 \Leftrightarrow x^2+4x+4+y^2-2y+1-1-4-15=0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-1)^2-20=0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-1)^2=20$

donc $\mathscr{C}'$ est le cercle de centre $I(-2,1)$ et de rayon $r=\sqrt{20}$

b) T est la droite passant par $E(2,3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{IE}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ donc une équation cartésienne de T s'écrit sous la forme $4x+2y+c=0$

d'autre part $E\in T$ donc $4\times 2+2\times 3+c=0$ donc $c=-14$ et par suite $T: 4x+2y-14=0$

3) $IK=\sqrt{(1+2)^2+(1-1)^2}=\sqrt{9}=3<\sqrt{10}+\sqrt{20}$ donc $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont sécants en deux points.

Exercice 7

1) a) $\mathscr{C}:(x+1)^2+(y-4)^2=10$

b) $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BI}=\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ donc I est le milieu de [BC]

de plus $BC=\sqrt{(-6)^2+(-2)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}=2R$ donc [BC] est un diamètre de $\mathscr{C}$

2) Un vecteur normal à Δ est $\overrightarrow{BI}=\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ donc une équation cartésienne de cette dernière s'écrit sous la forme $-3x-y+c=0$

d'autre part $B\in\Delta$ donc $-3\times 2-5+c=0$ c'est-à-dire $c=11$

donc $\Delta: -3x-y+11=0$

3) a) Si $x=0$ alors $(x+1)^2+(y-4)^2=10 \Leftrightarrow 1+(y-4)^2=10$

$\Leftrightarrow (y-4)^2=9$

$\Leftrightarrow y-4=3$ ou $y-4=-3$

$\Leftrightarrow y=7$ ou $y=1$

donc $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées aux points $A'(0,1)$ et $B'(0,7)$

b) $0-3\times 1+3=0$ donc $A'\in\Delta'$

$\overrightarrow{IA'}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Δ' donc $\Delta'\perp(IA')$ et par suite Δ' est tangente à $\mathscr{C}$ en A'

4) a) $x^2+y^2-4x-2y+1=0 \Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-2y+1-1-4+1=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2-4=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=2^2$

donc $\mathscr{C}'$ est le cercle de centre $J(2,1)$ et de rayon $R'=2$

b) Soit $M(x,y)$ un point de l'intersection de $\mathscr{C}'$ et Δ'

$M\in\Delta' \Leftrightarrow x-3y+3=0 \Leftrightarrow x=3y-3$

$M\in\mathscr{C}' \Leftrightarrow x^2+y^2-4x-2y+1=0$

$\Leftrightarrow (3y-3)^2+y^2-4(3y-3)-2y+1=0$

$\Leftrightarrow 9y^2-18y+9+y^2-12y+12-2y+1=0$

$\Leftrightarrow 10y^2 - 32y + 22 = 0$

$\Leftrightarrow 5y^2 - 16y + 11 = 0$

$\Leftrightarrow y = 1$ ou $y = \dfrac{11}{5}$

et par suite $\begin{cases} y = 1 \\ x = 3y - 3 = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = \dfrac{11}{5} \\ x = 3y - 3 = \dfrac{33}{5} - \dfrac{15}{5} = \dfrac{18}{5} \end{cases}$

donc $\mathscr{C}'$ et Δ' se coupent en deux points $A'(0,1)$ et $D\left(\dfrac{18}{5}, \dfrac{11}{5}\right)$

5) $M(x,y) \in \mathscr{C} \cap \mathscr{C}' \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + (y-4)^2 = 10 \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + -8y + 7 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$

$L_1 - L_2 \Rightarrow 6x - 6y + 6 = 0$ donc $x - y + 1 = 0$ ou encore $y = x + 1$

$L_2 \Rightarrow x^2 + (x+1)^2 - 4x - 2(x+1) + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 - 4x - 2x - 2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$

$\Leftrightarrow x(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

donc $\begin{cases} x = 0 \\ y = x + 1 = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 2 \\ y = x + 1 = 3 \end{cases}$

et par suite $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ se coupent en $A'(0,1)$ et $E(2,3)$

Exercice 8

1) **Méthode 1 :**

$M(x,y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow AM^2 + BM^2 = AB^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 + (x-4)^2 + (y-1)^2 = (4-2)^2 + (1-(-1))^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 = 4 + 4$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 2y^2 + 14 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x + 7 = 0$

donc $\mathscr{C} : x^2 + y^2 - 6x + 7 = 0$

Méthode 2 :

Soit I le milieu de $[AB]$ alors $I = (3,0)$

$\mathscr{C}$ est donc le cercle de centre I et de rayon $\dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2}\sqrt{(4-2)^2 + (1-(-1))^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{8} = \sqrt{2}$

donc $\mathscr{C} : (x-3)^2 + y^2 = 2$

ou encore $\mathscr{C} : x^2 + y^2 - 6x + 7 = 0$

2) **Méthode 1 :**

$M(x,y) \in \mathscr{D} \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow AM^2 = BM^2$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = (x-4)^2 + (y-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1$

$\Leftrightarrow 4x + 4y - 12 = 0$

$\Leftrightarrow x + y - 3 = 0$

donc $\mathscr{D} : x + y - 3 = 0$

Méthode 2 :

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$ donc une équation cartésienne de cette dernière s'écrit sous la forme $2x + 2y + c = 0$

d'autre part $\mathscr{D}$ passe par I donc $2 \times 3 + 2 \times 0 + c = 0$ c'est-à-dire $c = -6$

donc $\mathscr{D} : 2x + 2y - 6 = 0$

ou encore $\mathscr{D} : x + y - 3 = 0$

3) Soit $M(x,y)$ un point de l'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}'$

$M \in \mathscr{D}'$ donc $x + y - 3 = 0$ et par suite $y = 3 - x$

$M \in \mathscr{C}$ donc $x^2 + y^2 - 6x + 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (3-x)^2 - 6x + 7 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 9 - 6x + x^2 - 6x + 7 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 16 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$

$\Delta = 36 - 4 \times 8 = 4$ donc $x = \dfrac{6+2}{2} = 4$ ou $x = \dfrac{6-2}{2} = 2$

et par suite $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 - x = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 - x = -1 \end{cases}$

donc $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}'$ se coupent aux points $A'(2,1)$ et $B'(4,-1)$

4) $M(x,y) \in E \Leftrightarrow 2AM^2 - BM^2 = 9$

$\Leftrightarrow 2\left[(x-2)^2 + (y+1)^2\right] - \left[(x-4)^2 + (y-1)^2\right] = 9$

$\Leftrightarrow 2\left[x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1\right] - \left[x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1\right] = 9$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 2y^2 + 4y + 10 - x^2 + 8x - y^2 + 2y - 17 = 9$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6y - 7 = 9$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6y + 9 - 16 = 9$

$\Leftrightarrow x^2 + (y+3)^2 = 25$

donc E est le cercle de centre $J(0,-3)$ et de rayon 5

Exercice 9

1) $OA = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$OB = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} = OA$ donc OAB est un triangle isocèle en O.

2) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normale à Δ donc une équation cartésienne de cette dernière s'écrit sous la forme $4x - 4y + c = 0$

d'autre part $O \in \Delta$ donc $4 \times 0 - 4 \times 0 + c = 0$ c'est-à-dire $c = 0$ et par suite $\Delta : 4x - 4y = 0$

ou encore, en divisant par 4, $\Delta : x - y = 0$

3) **Méthode 1 :**

$\mathscr{C}$ est le cercle de centre I milieu de $[OA]$ et de rayon $r = \frac{1}{2}OA = \sqrt{10}$

$x_I = \dfrac{x_A}{2} = 1$ et $y_I = \dfrac{y_A}{2} = 3$

donc $\mathscr{C} : (x-1)^2 + (y-3)^2 = 10$

Méthode 2 :

Soit $M(x,y)$ un point du plan alors $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y-6 \end{pmatrix}$

$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow x(x-2) + y(y-6) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 6y = 0$

donc $\mathscr{C} : x^2 - 2x + y^2 - 6y = 0$

4) $A' \in \mathscr{C}$ donc OAA' est un triangle rectangle en A' donc $\overrightarrow{OA'} \perp \overrightarrow{AA'}$

$A' \in (OB)$ donc $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires et par suite $\overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{OB}$

(AA') est donc la droite passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Une équation cartésienne de (AA') s'écrit donc sous la forme $6x + 2y + d = 0$

$A \in (AA')$ donc $6 \times 2 + 2 \times 6 + d = 0$ et par suite $d = -24$

donc $(AA') : 6x + 2y - 24 = 0$ ou encore, en divisant par 2, $(AA') : 3x + y - 12 = 0$

5) a) $\Delta \perp (AB)$ et $(AA') \perp (OB)$ donc H est l'orthocentre du triangle OAB

b) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 3x + y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 4x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 4x = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$

donc $H(3,3)$

Exercice 10

1) a) **Méthode 1 :**

$M(x,y) \in \Delta \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow AM^2 = BM^2$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = (x-2)^2 + (y+1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1$

$\Leftrightarrow -2x - 6y + 8 = 0$

$\Leftrightarrow x + 3y - 4 = 0$

donc $\Delta : x + 3y - 4 = 0$

Méthode 2 :

Le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$

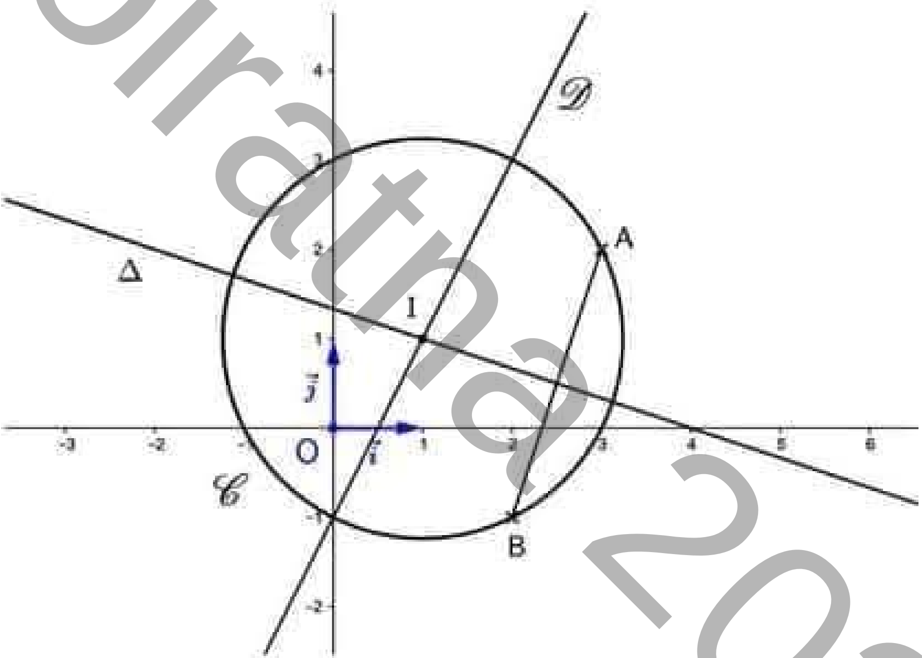
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Δ donc une équation cartésienne de cette dernière s'écrit sous la forme $-x - 3y + c = 0$

d'autre part Δ passe par le point de coordonnées $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$ donc $-\frac{5}{2} - 3 \times \frac{1}{2} + c = 0$ c'est-à-dire $c = 4$

donc $\Delta : -x - 3y + 4 = 0$

ou encore $\Delta : x + 3y - 4 = 0$

b)



c) $\mathscr{C}$ passe par A et B donc son centre I appartient à la droite Δ et par suite I est le point d'intersection des droites Δ et $\mathscr{D}$

2) a) $\begin{cases} x + 3y - 4 = 0 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3(2x-1) - 4 = 0 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 7 = 0 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ donc $I(1,1)$

Le rayon du cercle $\mathscr{C}$ est $IA = \sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$

b) Soit $M(x,y)$ un point du plan alors $IM^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$

$M \in \mathscr{D} \cap \mathscr{C} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ IM = \sqrt{5} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ IM^2 = 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x^2 + (2x-1)^2 - 2x - 2(2x-1) + 2 = 5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x^2 + 4x^2 - 4x + 1 - 2x - 4x + 2 + 2 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 5x^2 - 10x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 5x(x-2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

donc $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{C}$ au points $M_1(0,-1)$ et $M_2 = (2,3)$

3) Soit T la tangente à $\mathcal{C}$ en A alors $T \perp (IA)$ et par suite $\overrightarrow{IA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à T donc une équation cartésienne de cette dernière s'écrit sous la forme $2x + y + d = 0$
d'autre part T passe par A donc $2 \times 3 + 2 + d = 0$ donc $d = -8$
donc $T : 2x + y - 8 = 0$

Exercice 11

1) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 - 1 - 1 - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$$

donc $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $I(1,1)$ et de rayon $r = \sqrt{5}$

2) $0^2 + (-1)^2 - 2 \times 0 - 2 \times (-1) - 3 = 0$ donc $A(0,-1)$ est un point de $\mathcal{C}$
$(-1)^2 + 2^2 - 2 \times (-1) - 2 \times 2 - 3 = 0$ donc $B(-1,2)$ est un point de $\mathcal{C}$

3) Soit T_A et T_B les tangentes respectives au cercle $\mathcal{C}$ en A et B
$\overrightarrow{IA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à T_A donc une équation cartésienne de cette dernière s'écrit sous la forme $-x - 2y + c = 0$
$A \in T_A$ donc $-0 - 2 \times (-1) + c = 0$ c'est-à-dire $c = -2$ et par suite $T_A : -x - 2y - 2 = 0$
Ou encore, en divisant par -1, $\boxed{T_A : x + 2y + 2 = 0}$
$\overrightarrow{IB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à T_B donc une équation cartésienne de cette dernière s'écrit sous la forme $-2x + y + d = 0$
$B \in T_B$ donc $-2 \times (-1) + 1 \times 2 + d = 0$ c'est-à-dire $d = -4$ et par suite $\boxed{T_B : -2x + y - 4 = 0}$

4) **Méthode 1 :**
→ $IA = IB$ donc I appartient à la médiatrice du segment $[AB]$
→ $\begin{cases} x + 2y + 2 = 0 \\ -2x + y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 2 \\ -2x + y - 4 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 2 \\ -2(-2y-2) + y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 2 \\ 5y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$$

donc $P(-2,0)$
$AP = \sqrt{(-2)^2 + 1} = \sqrt{5}$
$BP = \sqrt{(-2-(-1))^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

et par suite $AP = BP$ donc P appartient à la médiatrice du segment $[AB]$
donc (PI) est la médiatrice du segment $[AB]$

Méthode 2 :

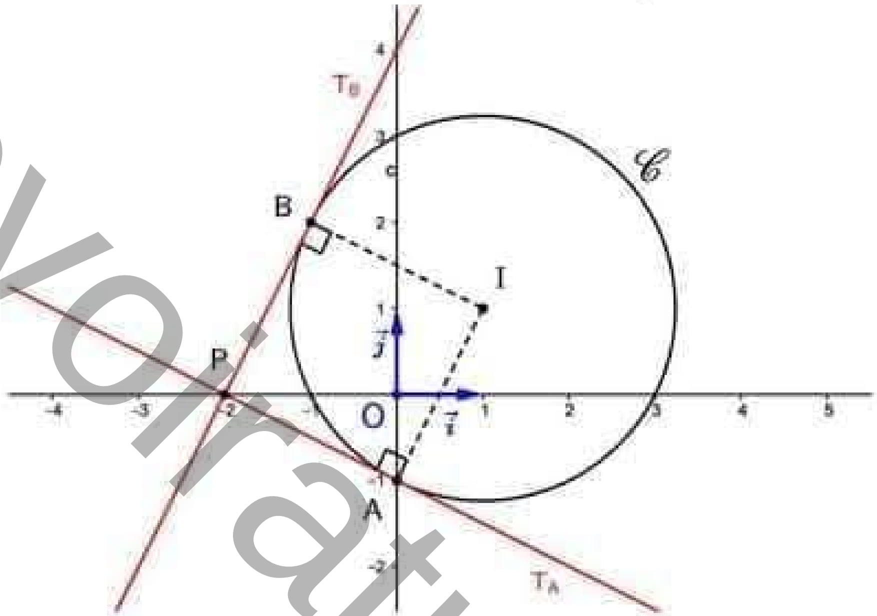
$\overrightarrow{IA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$-1\times(-2)+(-2)\times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{IA} \perp \overrightarrow{IB}$ et par suite $T_A \perp T_B$

d'autre part $(IB) \perp T_B$ et $(IA) \perp T_A$ donc AIBP possède quatre angles droits et par suite AIBP est un rectangle

$IA = IB$ donc AIBP est un carré

finalement $PA = PB$ et $IA = IB$ donc (PI) est la médiatrice du segment $[AB]$



Exercice 12

1) a) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 - 1 - 9 + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$$

donc $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $I(1,3)$ et de rayon $R = \sqrt{4} = 2$

b) $d(I,\mathscr{D}) = \frac{|1+3-2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < R$ donc $\mathscr{D}$ coupe $\mathscr{C}$ en deux points A et B.

c) $\begin{cases} x+y-2=0 \\ x^2+y^2-2x-6y+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2-x \\ x^2+y^2-2x-6y+6=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2-x \\ x^2+(2-x)^2-2x-6(2-x)+6=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2-x \\ x^2+4-4x+x^2-2x-12+6x+6=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2-x \\ 2x^2-2=0 \end{cases}$$

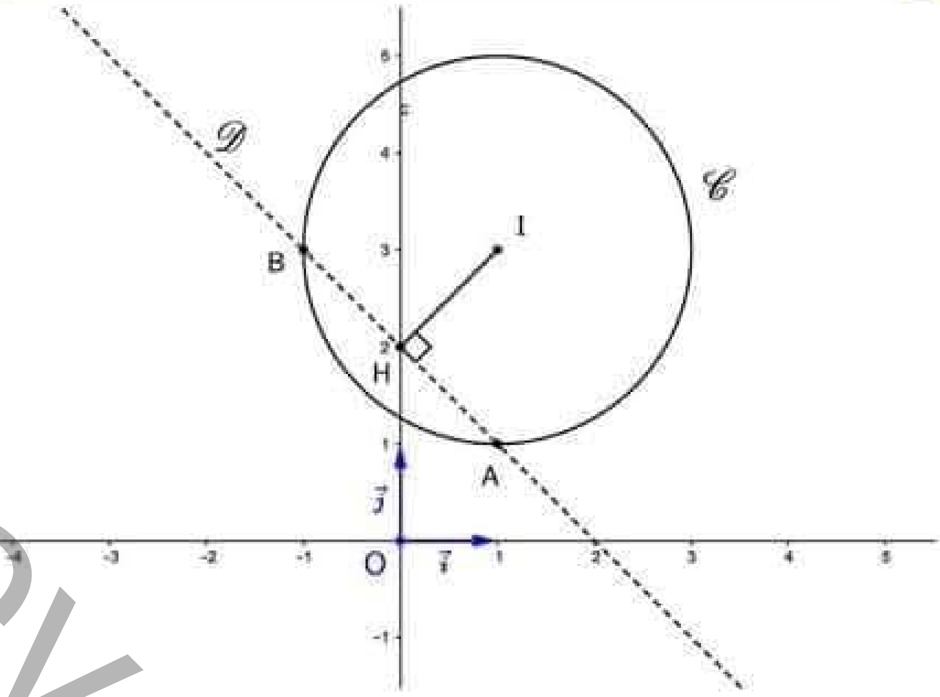
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2-x \\ x^2=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

donc $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ sont sécants au points $A(1,1)$ et $B(-1,3)$

2) a) $IA = IB$ donc I appartient à médiatrice du segment $[AB]$
$(IH) \perp (AB)$ donc (IH) est la médiatrice du segment $[AB]$ et par suite H est le milieu de $[AB]$

b) $x_H = \frac{1+(-1)}{2} = 0$ et $y_H = \frac{1+3}{2} = 2$ c'est-à-dire $H(0,2)$



Exercice 13

1) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix}6&3\\3&4\end{vmatrix}=6\times4-3\times3=24-9=5\neq0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite A, B et C ne sont pas alignés.

2) $AB=\sqrt{6^2+3^2}=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

$AC=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

$BC=\sqrt{3^2+(4-3)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

3) On a, d'après le théorème d'EL-Kashi, $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos\left(\widehat{ABC}\right)$

donc $\cos\left(\widehat{ABC}\right)=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\times BC}=\dfrac{45+10-25}{2\times3\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=\dfrac{30}{30\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

et par suite $\widehat{ABC}=\dfrac{\pi}{4}$

4) $2R=\dfrac{AC}{\sin\left(\widehat{ABC}\right)}$ donc $R=\dfrac{AC}{2\sin\left(\widehat{ABC}\right)}=\dfrac{5}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

5) $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à Δ donc une équation cartésienne de cette dernière s'écrit sous la forme $6x+3y+c=0$

d'autre part Δ passe par C donc $6\times0+3\times4+c=0$ donc $C=-12$

et par suite $\Delta: 6x+3y-12=0$

ou encore, en divisant par 3, $\boxed{\Delta: 2x+y-4=0}$

6) a) $2\times2\alpha+(4-4\alpha)-4=\cancel{4\alpha}+4-\cancel{4\alpha}-4=0$ donc $M(2\alpha,4-4\alpha)$ appartient à la droite Δ

b) $M\in(AB)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix}2\alpha+3\\4-4\alpha\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow\det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)=\begin{vmatrix}2\alpha+3&6\\4-4\alpha&3\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow 6\alpha+9-24+24\alpha=0$

$\Leftrightarrow 30\alpha-15=0$

$\Leftrightarrow \alpha=\dfrac{15}{30}=\dfrac{1}{2}$

7) a) Δ' est la droite qui porte la hauteur issue de B dans le triangle ABC donc $\Delta'\perp(AC)$ et par suite $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Δ'

Une équation cartésienne de Δ' s'écrit donc sous la forme $3x+4y+c'=0$

d'autre part $B \in \Delta'$ donc $3\times 3+4\times 3+c'=0$ et par suite $c'=-21$

donc $\boxed{\Delta' : 3x+4y-21=0}$

b) Δ est la droite qui porte la hauteur issue de C dans le triangle ABC donc l'orthocentre H du triangle ABC est le point d'intersection de Δ et Δ' :

$$\begin{cases} 2x+y-4=0 \\ 3x+4y-21=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-2x \\ 3x+4y-21=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=4-2x \\ 3x+4(4-2x)-21=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=4-2x \\ 3x+16-8x-21=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=4-2x \\ -5x-5=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=4-2x \\ x=1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=6 \\ x=-1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow H(-1,6)$$

Exercice 14

1) $\mathscr{C} : (x-3)^2+(y-2)^2=5$

2) a) $(4-3)^2+(4-2)^2=1+4=5$ donc $A(4,4)\in\mathscr{C}$

b) Δ est tangente à $\mathscr{C}$ en A donc $\Delta \perp (IA)$ et par suite $\overrightarrow{IA}$ est un vecteur normal à Δ

$\overrightarrow{IA}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ donc une équation cartésienne de Δ s'écrit sous la forme $x+2y+c=0$

d'autre part $A\in\Delta$ donc $4+2\times 4+c=0$ c'est-à-dire $c=c=-12$

donc $\Delta : x+2y-12=0$

c) B est un point de l'axe des ordonnées donc les coordonnées de B sont sous la forme $(0,y)$

$B\in\Delta$ donc $2y-12=0$ et par suite $y=\dfrac{12}{2}=6$ donc $B(0,6)$

3) a) $x_J=\dfrac{x_A+x_B}{2}=2$ et $y_J=\dfrac{y_A+y_B}{2}=5$ donc $J(2,5)$

b) $2\times 2-5+1=0$ donc $J\in\mathscr{D}$

$\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ donc $\det(\vec{n},\overrightarrow{AB})=\begin{vmatrix}2 & -4\\-1 & 2\end{vmatrix}=2\times 2-(-1)\times(-4)=0$ donc $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et par suite $\mathscr{D}\perp(AB)$

donc $\mathscr{D}$ est la médiatrice du segment $[AB]$

c) $d(I,\mathscr{D})=\dfrac{|2\times 3-2+1|}{\sqrt{2^2+1}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}=IA$ donc $\mathscr{D}$ est tangente au cercle $\mathscr{C}$

4) Soit $M(x,y)$ un point du plan

$$M\in E \Leftrightarrow MA^2+MB^2=100$$
$$\Leftrightarrow (x-4)^2+(y-4)^2+x^2+(y-6)^2=100$$
$$\Leftrightarrow x^2-8x+16+y^2-8y+16+x^2+y^2-12y+36=100$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-8x+2y^2-20y=32$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x+y^2-10y=16$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-10y+25-29=16$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-5)^2=45$$

donc E est le cercle de centre J et de rayon $\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

Exercice 15

1) a) $AB^2 = (2+2)^2 + (3+1)^2 = 32$

Soit $M(x,y)$ un point de $\mathscr{C}$ alors :

$$\begin{aligned} MA^2 + 3\,MB^2 = AB^2 &\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+1)^2 + 3\left[(x-2)^2 + (y-3)^2\right] = 32 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + 3\left[x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9\right] = 32 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + 3x^2 - 12x + 3y^2 - 18y + 39 = 32 \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 4y^2 - 16y = -12 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 4y = -3 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 2 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2 \end{aligned}$$

donc $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $I(1,2)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$

b) $\dfrac{x_A + 3x_B}{4} = \dfrac{-2 + 3\times 2}{4} = 1 = x_I$ et $\dfrac{y_A + 3y_B}{4} = \dfrac{-1 + 3\times 3}{4} = 2 = y_I$ donc I est le barycentre des points pondérés $(A,1)$ et $(B,3)$

2) a) Soit $M(x,y)$ un point d'intersection du cercle $\mathscr{C}$ et la droite $(O,\vec{j})$

$M(x,y)$ appartient à la droite $(O,\vec{j})$ donc $x = 0$ c'est-à-dire $M(0,y)$

$$\begin{aligned} M(0,y) \in \mathscr{C} &\Leftrightarrow 1^2 + (y-2)^2 = 2 \\ &\Leftrightarrow (y-2)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow y - 2 = 1 \text{ ou } y - 2 = -1 \\ &\Leftrightarrow y = 3 \text{ ou } y = 1 \end{aligned}$$

donc $\mathscr{C}$ coupe la droite $(O,\vec{j})$ aux points $E(0,1)$ et $F(0,3)$

b) Δ est la tangente à $\mathscr{C}$ en F donc $\Delta \perp (IF)$ et par suite $\overrightarrow{IF} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite Δ

Une équation cartésienne de Δ s'écrit donc sous la forme $-x + y + c = 0$

d'autre part $F \in \Delta$ donc $-0 + 3 + c = 0$ c'est-à-dire $c = -3$

donc $\Delta : -x + y - 3 = 0$

ou encore, en multipliant par -1, $\boxed{\Delta : x - y + 3 = 0}$

c) **Méthode 1 :**

Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\,\vec{u}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires et par suite (AB) et Δ sont parallèles.

Méthode 2 :

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{IF} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Δ

$4\times(-1) + 4\times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{IF} \perp \overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{IF}$ est un vecteur normal à la droite (AB) et par suite (AB) et Δ sont parallèles.

3) Soit Δ' l'autre tangente à $\mathscr{C}$ parallèle à (AB)

$\overrightarrow{IF}$ est un vecteur normal à Δ' car $\Delta // \Delta'$ et par suite une équation cartésienne de Δ' s'écrit sous la forme $\Delta : -x + y + c' = 0$

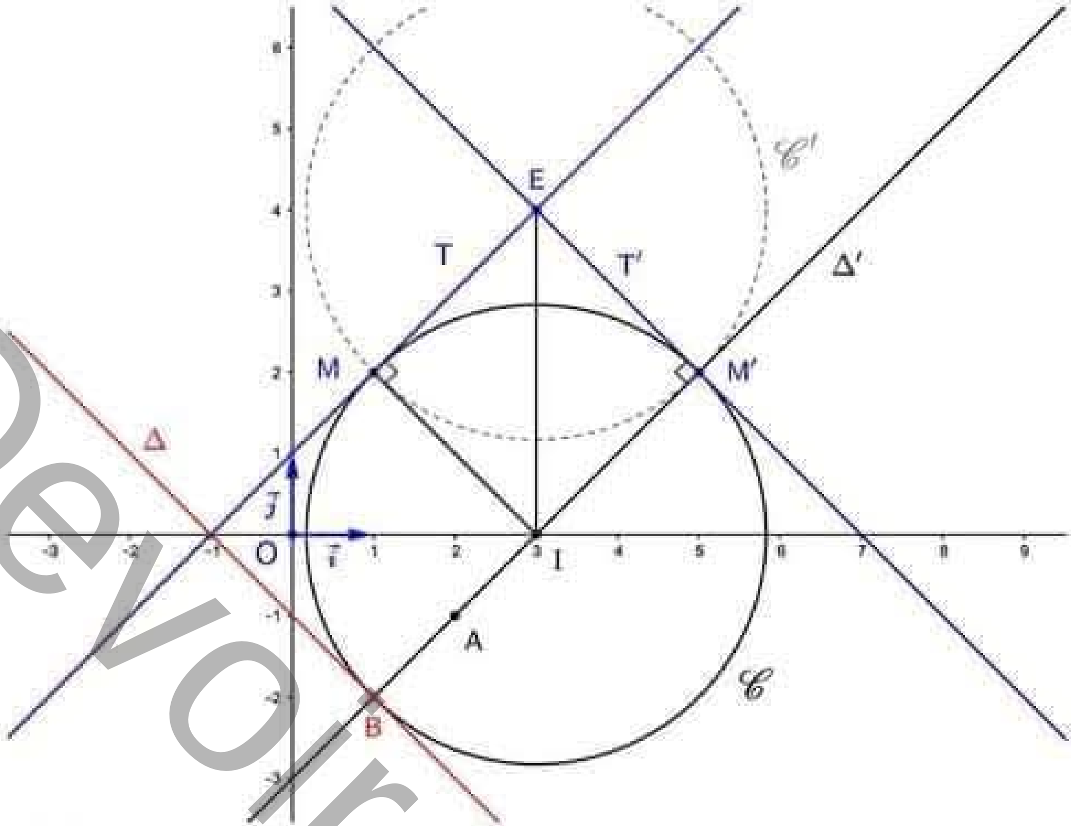
d'autre part Δ' est tangente à $\mathscr{C}$ donc $d(I,\Delta') = R = \sqrt{2}$

$d(I,\Delta') = \dfrac{|-1 + 2 + c'|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \dfrac{|1 + c'|}{\sqrt{2}}$ donc $d(I,\Delta') = R = \sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{|1+c'|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow |1 + c'| = 2 \\ &\Leftrightarrow 1 + c' = 2 \text{ ou } 1 + c' = -2 \\ &\Leftrightarrow c' = 1 \text{ ou } c' = -3 \end{aligned}$$

Si $c' = 3$, on aura l'équation de Δ donc $c' = 1$ c'est-à-dire $\Delta' : -x + y + 1 = 0$ ou encore $\boxed{\Delta' : x - y - 1 = 0}$

Exercice 16



1) a) $\vec{u}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ donc $\vec{u}$ est un vecteur normal à Δ' et par suite une équation cartésienne de Δ' s'écrit sous la forme $-x+y+c=0$

d'autre part $A\in\Delta'$ donc $-2+(-1)+c=0$ c'est-à-dire $c=3$

donc $\boxed{\Delta':-x+y+3=0}$

b) $\begin{cases}x+y+1=0\\-x+y+3=0\end{cases}$

$L_1+L_2 \Rightarrow 2y+4=0$ donc $y=-2$

$L_1 \Rightarrow x+(-2)+1=0$ donc $x=1$

donc $B(1,-2)$

2) a) $x^2+y^2-6x+1=0 \Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2-8=0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+y^2=8$

donc $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $I(3,0)$ et de rayon $R=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

b) $d(I,\Delta)=\dfrac{|3+0+1|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}=R$ donc Δ est tangente à $\mathscr{C}$

3) a) $IE=\sqrt{(3-3)^2+4^2}=\sqrt{16}=4>R=2\sqrt{2}$ donc E est à l'extérieur de $\mathscr{C}$.

b) Soit T une tangente à $\mathscr{C}$ passant par E et soit M le point d'intersection de $\mathscr{C}$ et T.

IME est un triangle rectangle en M et par suite $IE^2=EM^2+IM^2$ donc $EM^2=IE^2-IM^2=16-R^2=8$ et par suite M appartient au cercle $\mathscr{C}'$ de centre E et de rayon $R'=\sqrt{8}$

→ Cherchons l'équation cartésienne de $\mathscr{C}'$

$\mathscr{C}':(x-3)^2+(y-4)^2=8 \Leftrightarrow \mathscr{C}':x^2-6x+9+y^2-8y+16=8$

$\Leftrightarrow \mathscr{C}':x^2+y^2-6x-8y+17=0$

→ Cherchons les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$:

$\begin{cases}x^2+y^2-6x-8y+17=0\\x^2+y^2-6x+1=0\end{cases}$

$L_1-L_2 \Rightarrow -8y+16=0$ donc $y=2$

$L_2 \Rightarrow x^2-6x+5=0$ donc $x=1$ ou $x=5$

donc $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ se coupent aux points $M(1,2)$ et $M'(5,2)$
et par suite les tangentes T et T' à $\mathscr{C}$ respectivement en M et M' passent par E.

→ **L'équation cartésienne de T :**

$\overrightarrow{IM} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à T

donc une équation cartésienne de cette dernière s'écrit sous la forme $-2x + 2y + a = 0$
d'autre part T passe par $M(1,2)$ donc $-2 \times 1 + 2 \times 2 + a = 0$ c'est-à-dire $a = -2$
donc $T : -2x + 2y - 2 = 0$ ou encore, en divisant par -2, $\boxed{T : x - y + 1 = 0}$

→ **L'équation cartésienne de T' :**

$\overrightarrow{IM'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à T'

donc une équation cartésienne de cette dernière s'écrit sous la forme $2x + 2y + a' = 0$
d'autre part T' passe par $M'(5,2)$ donc $2 \times 5 + 2 \times 2 + a' = 0$ c'est-à-dire $a' = -14$
donc $T' : 2x + 2y - 14 = 0$ ou encore, en divisant par 2, $\boxed{T' : x + y - 7 = 0}$

Exercice 17

1) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ donc $(AB) // \mathscr{D}$

2) a) $\Delta \perp \mathscr{D}$ donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à Δ
Une équation cartésienne de la droite Δ s'écrit sous la forme $x - 2y + c = 0$
d'autre part $A \in \Delta$ donc $-1 - 2 \times 4 + c = 0$ c'est-à-dire $c = 9$
donc $\boxed{\Delta : x - 2y + 9 = 0}$

b) $$\begin{cases} y = -2x - 3 \\ x - 2y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x - 3 \\ x - 2(-2x-3) + 9 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x - 3 \\ 5x + 15 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x - 3 \\ x = -3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \times (-3) - 3 = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

donc $C(-3,3)$

3) a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$1 \times (-2) + (-2) \times (-1) = 0$ donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ et par suite ABC est rectangle en A.
$AB = \sqrt{1 + (-2)^2} = \sqrt{5}$ et $AC = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5} = AB$ donc ABC est isocèle en A.

b) ABC est un triangle rectangle en A donc son cercle circonscrit est le cercle $\mathscr{C}$ de centre I milieu de [BC] et de rayon $\frac{1}{2}BC$

$x_I = \frac{0 + (-3)}{2} = -\frac{3}{2}$ et $y_I = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$ donc $I\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$\frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + (2-3)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$ donc $\left(\frac{1}{2}BC\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

$$\boxed{\mathscr{C} : \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}}$$

4) a) $$x^2 + y^2 + x - y - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{5}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right) + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

donc $\mathscr{C}'$ est le cercle de centre $I'\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $R' = \sqrt{\frac{5}{2}}$

b) → $\overrightarrow{II'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$ donc $I' = t_{\overrightarrow{AB}}(I)$

→ $R' = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} = R$ c'est-à-dire $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont isométriques (de même rayon)

donc $\mathscr{C}'$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$

Exercice 18

1) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$ donc c'est un vecteur directeur de la droite (AH)

donc une équation cartésienne de la droite (AH) s'écrit sous la forme $x - 3y + c = 0$

d'autre part $H \in (AH)$ donc $2 - 3 \times 0 + c = 0$ c'est-à-dire $c = -2$

donc $(AH) : x - 3y - 2 = 0$

$$\begin{cases} 3x + y + 4 = 0 \\ x - 3y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x - 4 \\ x - 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x - 4 \\ x - 3(-3x - 4) - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x - 4 \\ 10x + 10 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x - 4 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \times (-1) - 4 = -1 \\ x = -1 \end{cases}$$

donc $H(-1, -1)$

2) $K \in \mathscr{D}$ donc $3x_K + y_K + 4 = 0$ et par suite $3 \times (-2) + y_K + 4 = 0$ ou encore $y_K = 2$ donc $K(-2, 2)$

Méthode 1 :

$(-2)^2 + 2^2 - 2 \times 2 - 4 = 0$ donc $K(-2, 2) \in \mathscr{C}$

$(-1)^2 + (-1)^2 - 2 \times (-1) - 4 = 0$ donc $H(-1, -1) \in \mathscr{C}$

$2^2 + 0^2 - 2 \times 0 - 4 = 0$ donc $A(2, 0) \in \mathscr{C}$

et par suite $\mathscr{C} : x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$ est le cercle circonscrit au triangle AHK.

Méthode 2 :

$$x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 - 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 5$$

donc $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $I(0, 1)$ et de rayon $r = \sqrt{5}$

$IA = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5} = r$

$IK = \sqrt{(-2)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{5} = r$

$IH = \sqrt{(-1)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{5} = r$

donc $\mathscr{C}$ passe par A, H et K c'est-à-dire $\mathscr{C}$ est le cercle circonscrit au triangle AHK.

Méthode 3 :

H est le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$ donc AHK est un triangle rectangle en H et par suite son cercle circonscrit est le cercle de centre I milieu de $[AK]$ et de rayon $r = \frac{1}{2} AK$

$x_I = \frac{2 + (-2)}{0} = 0$ et $y_I = \frac{2 + 0}{2} = 1$ donc $I(0, 1)$

$r = \frac{1}{2} AK = \frac{1}{2} \sqrt{(-2 - 2)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{20} = \sqrt{5}$

donc une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle AHK est :

$x^2 + (y - 1)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$

et par suite $\mathscr{C} : x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$ est le cercle circonscrit au triangle AHK

3) a) $IE = \sqrt{(-1)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{10} > \sqrt{5} = r$ donc E est à l'extérieur de $\mathscr{C}$

b) E est à l'extérieur de $\mathscr{C}$ donc ce dernier possède deux tangentes T_1 et T_2 passant par E.

Soit T une tangente à $\mathscr{C}$ passant par E et M le point d'intersection de T et $\mathscr{C}$ alors IEM est un triangle rectangle en M

alors, d'après le théorème de Pythagore, $IE^2 = ME^2 + IM^2$

et par suite $E^2 = IE^2 - IM^2 = 10 - r^2 = 10 - 5 = 5$

donc M est un point d'intersection du $\mathscr{C}$ avec le cercle $\mathscr{C}'$ de centre E et de rayon $\sqrt{5}$

→ Equation cartésienne de $\mathscr{C}'$:

$$\mathscr{C}' : (x+1)^2 + (y+2)^2 = 5 \Leftrightarrow \mathscr{C}' : x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 5$$
$$\Leftrightarrow \mathscr{C}' : x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 - 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow \mathscr{C}' : x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$$

→ Points d'intersections de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0 \\ 2x + 6y + 4 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0 \\ 2x = -4 - 6y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0 \\ x = -2 - 3y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-2 - 3y)^2 + y^2 - 2y - 4 = 0 \\ x = -2 - 3y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 12y + 9y^2 + y^2 - 2y - 4 = 0 \\ x = -2 - 3y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10y^2 + 10y = 0 \\ x = -2 - 3y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10(y+1)y = 0 \\ x = -2 - 3y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -2 - 3y \end{cases} \text{ ou } \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = -2 - 3y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -2 \end{cases} \text{ ou } \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

donc $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ se coupent aux points $M_1(-2,0)$ et $M_2(1,-1)$

→ Equations cartésienne de T_1 et T_2 :

T_1 est la droite (EM_1)

Un vecteur normal à T_1 est $\overrightarrow{IM_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc une équation cartésienne de cette dernière s'écrit sous la forme $-2x - y + c = 0$

d'autre part $E \in T_1$ donc $-2 \times (-1) - (-2) + c = 0$ ou encore $c = -4$

et par suite $T_1 : -2x - y - 4 = 0$ ou encore $\boxed{T_1 : 2x + y + 4 = 0}$

T_2 est la droite (EM_2)

Un vecteur normal à T_2 est $\overrightarrow{IM_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc une équation cartésienne de cette dernière s'écrit sous la forme $x - 2y + c' = 0$

d'autre part $E \in T_2$ donc $(-1) - 2 \times (-2) + c' = 0$ ou encore $c = -3$

et par suite $\boxed{T_2 : x - 2y - 3 = 0}$

Exercice 19

1) a) $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$-4 \times 1 + (-2) \times (-2) = 0$ donc $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AD}$ et par suite ABD est rectangle en D.

$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-\frac{9}{2}\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$

$\frac{1}{2}\times\left(-\frac{9}{2}\right)+\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}=-\frac{9}{4}+\frac{9}{4}=0$ donc $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$ et par suite ABC est rectangle en C.

b) ABC est rectangle en C donc le milieu I de $[AB]$ est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC.

$x_I=\frac{-2+3}{2}=\frac{1}{2}$ et $y_I=\frac{0+0}{2}=0$ donc $I=\left(\frac{1}{2},0\right)$

$IA=\sqrt{\left(-2-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}$

$ID=\sqrt{\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2+(-2)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}=IA$ donc $D\in\mathscr{C}$

et par suite A, B, C et D sont des points du cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon $\frac{5}{2}$ (le cercle circonscrit au triangle ABC)

c) $\mathscr{C}:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \mathscr{C}:x^2-x+\frac{1}{4}+y^2=\frac{25}{4}$

$\Leftrightarrow \boxed{\mathscr{C}:x^2+y^2-x-6=0}$

2) a) **Méthode 1 :**

$\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-\frac{9}{2}\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (BC) donc une équation cartésienne de cette dernière s'écrit sous la forme $\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}y+a=0$

$B\in(BC)$ donc $\frac{3}{2}\times3+\frac{9}{2}\times0+a=0$ c'est-à-dire $a=-\frac{9}{2}$

et par suite $(BC):\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}y-\frac{9}{2}=0$ ou encore $\boxed{(BC):x+3y-3=0}$

$\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AD) donc une équation cartésienne de cette dernière s'écrit sous la forme $-2x-y+b=0$

$A\in(AD)$ donc $-2\times(-2)-0+b=0$ c'est-à-dire $b=-4$

et par suite $(AD):-2x-y-4=0$ ou encore $\boxed{(AD):2x+y+4=0}$

$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AC) donc une équation cartésienne de cette dernière s'écrit sous la forme $\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}y+c=0$

$A\in(AC)$ donc $\frac{3}{2}\times(-2)-\frac{1}{2}\times0+c=0$ c'est-à-dire $c=3$

et par suite $(AC):\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}y+3=0$ ou encore $\boxed{(AC):3x-y+6=0}$

$\overrightarrow{BD}=\begin{pmatrix}-4\\ -2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (BD) donc une équation cartésienne de cette dernière s'écrit sous la forme $-2x+4y+d=0$

$B\in(BD)$ donc $-2\times3+4\times0+d=0$ c'est-à-dire $d=6$

et par suite $(BD):-2x+4y+6=0$ ou encore $\boxed{(BD):x-2y-3=0}$

Méthode 2 :

$M(x,y)\in(BC)\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}=\begin{pmatrix}x-3\\ y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-\frac{9}{2}\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BC}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & -\frac{9}{2} \\ y & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = \frac{3}{2}(x-3)+\frac{9}{2}y = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}x+\frac{9}{2}y-\frac{9}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow x+3y-3=0$$

donc $\boxed{(BC): x+3y-3=0}$

$M(x,y)\in(AD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix} x+2 \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AD}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+2 & 1 \\ y & -2 \end{vmatrix} = -2(x+2)-y=0$$

$$\Leftrightarrow -2x-4-y=0$$

$$\Leftrightarrow 2x+y+4=0$$

donc $\boxed{(AD): 2x+y+4=0}$

$M(x,y)\in(AC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix} x+2 \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+2 & \frac{1}{2} \\ y & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = \frac{3}{2}(x+2)-\frac{1}{2}y=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}x+3-\frac{1}{2}y=0$$

$$\Leftrightarrow 3x-y+6=0$$

donc $\boxed{(AC): 3x-y+6=0}$

$M(x,y)\in(BD) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}=\begin{pmatrix} x-3 \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}=\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BD}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & -4 \\ y & -2 \end{vmatrix} = -2(x-3)+4y=0$$

$$\Leftrightarrow -2x+6+4y=0$$

$$\Leftrightarrow x-2y-3=0$$

donc $\boxed{(BD): x-2y-3=0}$

b) → Coordonnées de E :

$$\begin{cases} x+3y-3=0 \\ 2x+y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-3y \\ 2x+y+4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3-3y \\ 2(3-3y)+y+4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3-3y \\ 10-5y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3-3y \\ y=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3-3\times 2=-3 \\ y=2 \end{cases}$$

donc $E(-3,2)$

→ Coordonnées de F :

$$\begin{cases} 3x-y+6=0 \\ x-2y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x+6 \\ x-2y-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=3x+6 \\ x-2(3x+6)-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 6 \\ -5x - 15 = 0 \end{cases}$$

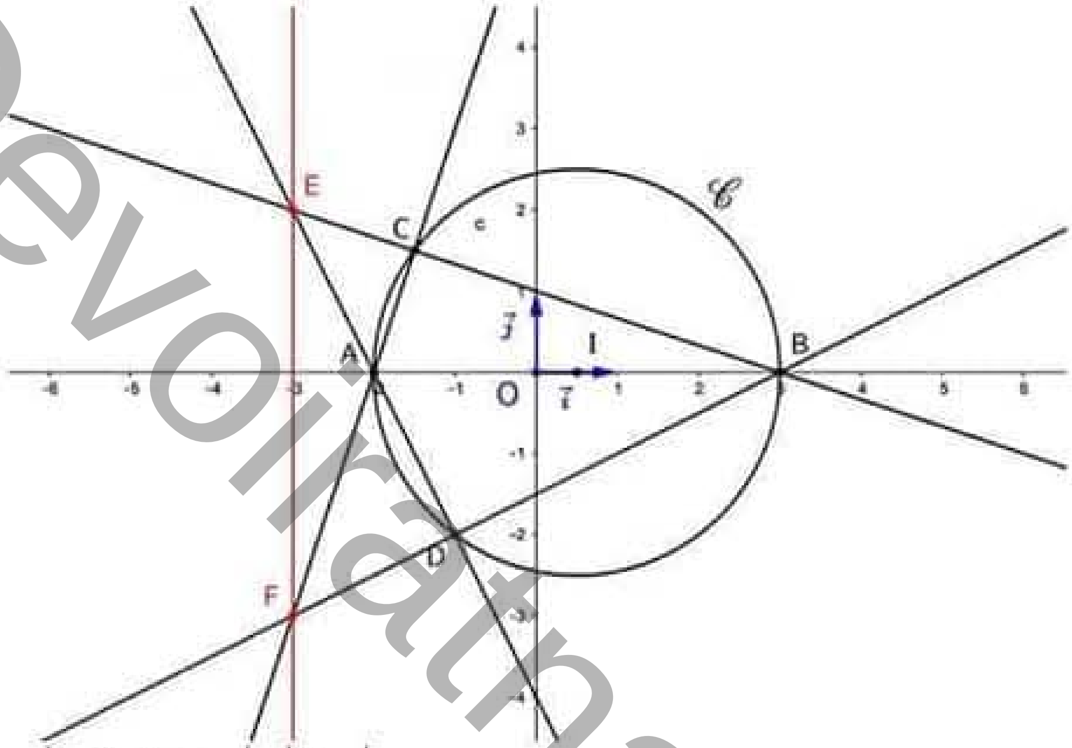
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 6 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \times (-3) + 6 = -3 \\ x = -3 \end{cases}$$

donc $F(-3,-3)$

$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $0 \times 5 + (-5) \times 0 = 0$ et par suite $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{AB}$ c'est-à-dire $(EF) \perp (AB)$

c)



3) $d(I, \Delta_m) = \dfrac{\left|3 \times \frac{1}{2} + 4 \times 0 + m\right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{\left|\frac{3}{2} + m\right|}{\sqrt{25}} = \dfrac{1}{5}\left|\dfrac{3}{2} + m\right|$

Δ_m est tangente au cercle $\mathscr{C}$ $\Leftrightarrow d(I, \Delta_m) = \dfrac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{5}\left|\dfrac{3}{2} + m\right| = \dfrac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{3}{2} + m\right| = \dfrac{25}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2} + m = \dfrac{25}{2}$ ou $\dfrac{3}{2} + m = -\dfrac{25}{2}$

$\Leftrightarrow m = \dfrac{22}{2} = 11$ ou $m = -\dfrac{28}{2} = -14$

4) I est le milieu de $[AB]$ donc $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ et par suite $B = h_{(A,2)}(I)$

$\mathscr{C}' = h_{(A,2)}(\mathscr{C})$ est donc le cercle de centre B et de rayon $2 \times \dfrac{5}{2} = 5$

$\mathscr{C}' : (x-3)^2 + y^2 = 25$

Exercice 20

1) a) $M \in \mathscr{C}_m \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2(m+2)x + 2(m-1)y + 6m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2(m+2)x + (m+2)^2 + y^2 + 2(m-1)y + (m-1)^2 - (m+2)^2 - (m-1)^2 + 6m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x+m+2)^2 + (y+m-1)^2 = (m+2)^2 + (m-1)^2 - 6m + 1$

$\Leftrightarrow (x+m+2)^2 + (y+m-1)^2 = m^2 + 4m + 4 + m^2 - 2m + 1 - 6m + 1$

$\Leftrightarrow (x+m+2)^2+(y+m-1)^2=2m^2-4m+6$

$2m^2-4m+6$ $\quad\Delta=(-4)^2-4\times6\times2=16-48=-32<0$ donc $2m^2-4m+6>0$ pour tout $m\in\mathbb{R}$

et par suite $\mathscr{C}_m$ est le cercle de centre $I_m(-2-m,1-m)$ et de rayon $R_m=\sqrt{2m^2-4m+6}$

b) $(-2-m)-(1-m)+3=-2-m-1+m+3=0$ donc I_m est un point de la droite $\mathscr{D}: x-y+3=0$

2) a) $\mathscr{C}_1$ est le cercle de centre $I_1(-3,0)$ et de rayon $R_1=\sqrt{4}=2$

b) $I_1A=\sqrt{(-2+3)^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{4}=2=R_1$ donc $A\in\mathscr{C}_1$

Δ est tangente à $\mathscr{C}_1$ en A donc $\Delta\perp(I_1A)$ et par suite $\overrightarrow{I_1A}=\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Δ

Une équation cartésienne de Δ s'écrit donc sous la forme $x+y\sqrt{3}+c=0$

d'autre part $A\in\Delta$ donc $-2+\sqrt{3}\times\sqrt{3}+c=0$ c'est à dire $c=-1$

donc $\boxed{\Delta: x+y\sqrt{3}-1=0}$

3) $d(I_1,\Delta_m)=\dfrac{|3\times(-3)-4\times0+m-1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{|m-10|}{\sqrt{25}}=\dfrac{|m-10|}{5}$

Δ_m est tangente à $\mathscr{C}_1$ $\Leftrightarrow d(I_1,\Delta_m)=R_1$

$\Leftrightarrow \dfrac{|m-10|}{5}=2$

$\Leftrightarrow |m-10|=10$

$\Leftrightarrow m-10=10$ ou $m-10=-10$

$\Leftrightarrow m=20$ ou $m=0$

donc Δ_0 et Δ_{20} sont tangentes à $\mathscr{C}_1$

Exercice 21

1) $M(x,y)\in\mathscr{C}_m \Leftrightarrow x^2+y^2-2mx+2(2-m)y-2m-1=0$

$\Leftrightarrow x^2-2mx+m^2+y^2+2(2-m)y+(2-m)^2=m^2+(2-m)^2+2m+1$

$\Leftrightarrow (x-m)^2+(y+2-m)^2=2m^2-2m+5$

$2m^2-2m+5=0$ $\quad\Delta=(-2)^2-4\times2\times5=-36<0$

m	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$2m^2-2m+5$	+

Pour tout m, $2m^2-2m+5>0$ donc $\mathscr{C}_m$ est un cercle de centre $I_m(m,m-2)$

2) a) $x^2+y^2-2mx+2(2-m)y-2m-1=x^2+y^2-2mx+4y-2my-2m-1$

$=x^2+y^2+4y-1-2m(x+y+1)$

$\begin{cases}x^2+y^2+4y-1=0\\x+y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+4y-1=0\\x=-1-y\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(-1-y)^2+y^2+4y-1=0\\x=-1-y\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2y^2+6y=0\\x=-1-y\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2(y+3)y=0\\x=-1-y\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\x=-1-y\end{cases}$ ou $\begin{cases}y+3=0\\x=-1-y\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\x=-1\end{cases}$ ou $\begin{cases}y=-3\\x=2\end{cases}$

donc les couples $(-1,0)$ et $(2,-3)$ vérifient l'équation cartésienne de $\mathscr{C}_m$ pour tout réel m et par suite les cercles $\mathscr{C}_m$ passent tous par les points $A(-1,0)$ et $B(2,-3)$

3) Pour tout réel m, le cercle $\mathscr{C}_m$ passe par A et B donc son centre I_m appartient la médiatrice Δ de [AB]

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite Δ donc une équation cartésienne de cette dernière s'écrit sous la forme $3x - 3y + c = 0$

d'autre part $I_0 = (0,-2) \in \Delta$ donc $3 \times 0 - 3 \times (-2) + c = 0$ c'est-à-dire $c = -6$

donc $\Delta : 3x - 3y - 6 = 0$

et par suite $\Delta : 3y = 3x - 6$

l'équation réduite de Δ est donc : $\boxed{\Delta : y = x - 2}$