LPS : 2sc

Série d'exercices

Mr Hadjkacem

16

Exercice 1 :

Soit l'équation(E): $x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 4x + 1 = 0$

1) Vérifier que 0 n'est pas une solution de l'équation(E)
2) On pose $X = x + \frac{1}{x}$

   a) Montrer que l'équation(E) est équivalente à une équation (E') à inconnue X

   b) Résoudre alors l'équation (E)

Exercice 2 :

Soit le trinome $T(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$

On suppose que $T(x)$ admet deux racines distinctes x' et x'' tels que $x'x'' = 10$ et $x' + 2x'' = 9$, $(x' < 2x'')$

Déterminer a, b et c lors que T(2)=6 puis résoudre $T(x) + x^3 = 64$

Exercice 3 :

Soit a et b deux réels tel que $a \neq 0$

On considère les trinomes $T(x) = ax^2 + x - a$ et $T'(x) = x^2 + bx - 1$

1) a) Montrer que $T(x)$ admet deux racines distinctes qu'on notera x_1 et x_2 tel que $x_1 < x_2$

   b) Montrer que $1 > \frac{x_1}{a}$
2) a) Montrer que $T'(x)$ admet deux racines distinctes qu'on notera x' et x'' tel que $x' < x''$

   b) Montrer que $1 > bx'$
3) Montrer que si $x_1 = x'$ alors $x_2 = x''$
4) On suppose que la somme des quatre racines est nulle et que $T(2) = T'(-3)$

   Déterminer a et b connaissant que $a < b$

Exercice 4 :

1) Résoudre dans IR : $x^2 - 7x + 10 = 0$
2) Résoudre dans IR^2 : $\begin{cases} 2a + 3b = 41 \\ 2a + b = 27 \end{cases}$
3) Déterminer les couples $(t; z)$ de réels qui vérifient $\begin{cases} 2tz + 3(t + z) = 41 \\ 2tz + t + z = 27 \end{cases}$

Exercice 5 :

Résoudre dans IR^2 le système $\begin{cases} x + y + xy = -3 \\ x^2y + xy^2 = 2 \end{cases}$

L P S
2020-2021

Série d'exercices

Mr: Hadj kacem
2 Sc

Exercice 1:

1) $0^4+4\cdot 0^3-10\cdot 0^2+4\cdot 0+1=1\neq 0$

Donc 0 n'est pas une solution de (E)

2) a) Soit $x\in\mathbb{R}^*$.

x est une solution de (E)

équi: $x^4+4x^3-10x^2+4x+1=0$

équi: $x^2+4x-10+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

équi: $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-10=0$

équi: $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-10=0$

équi: $X^2+4X-12=0$; $\left(X=x+\frac{1}{x}\right)$

d'où x solution de (E) équi X solution de (E')

tel que (E'): $X^2+4X-12=0$

b) Résolution l'équation (E')

$X^2+4X-12=0$

$\Delta=64>0$

$X=-6$ ou $X=2$

$x+\frac{1}{x}=-6$ | $x+\frac{1}{x}=2$

$x^2+6x+1=0$ | $x^2-2x+1=0$

$\Delta=32$ | $x=1$

$x=-3-2\sqrt{2}$ ou $x=-3+2\sqrt{2}$

d'où $S_{\mathbb{R}}=\{-3-2\sqrt{2}\,;-3+2\sqrt{2}\,;1\}$

Exercice 2:

$\begin{cases} x'x''=10 \\ x'+2x''=9 \end{cases}$ équi $\begin{cases} x'\cdot(2x'')=20 \\ x'+2x''=9 \end{cases}$

Donc x' et $2x'$ sont les solutions de l'équation $t^2 - 9t + 20 = 0$ avec $x' < 2x''$

$\Delta = 1 > 0$

$t_1 = 4$ et $t_2 = 5$

Donc $x' = 4$ et $2x'' = 5$

$x'' = \frac{5}{2}$

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $T(x) = a(x - x')(x - x'')$

$T(x) = a(x - 4)(x - \frac{5}{2})$

$T(2) = 6$ équivaut $a = 6$

D'où $T(x) = 6(x - 4)(x - \frac{5}{2})$

$= 6x^2 - 39x + 60$

D'où $a = 6$; $b = -39$ et $c = 60$.

d) $T(x) + x^3 = 64$

équivaut $6(x-4)(x - \frac{5}{2}) + x^3 - 4^3 = 0$

$(x-4)(6x - 15) + (x-4)(x^2 + 4x + 16) = 0$

$(x-4)(x^2 + 10x + 1) = 0$

$x - 4 = 0$ ou $x^2 + 10x + 1 = 0$

$x = 4$; $\Delta = 96$

$x = -5 - \sqrt{24}$ ou $x = -5 + \sqrt{24}$

$S_{\mathbb{R}} = \{-5 - \sqrt{24} ; -5 + \sqrt{24} ; 4\}$

Exercice 3 :

1) a) $T(x) = ax^2 + x - a$

le coefficient de x^2 et le coefficient constant sont de signe contraire ($a \cdot (-a) = -a^2 < 0$)

Donc le trinôme $T(x)$ admet deux zéros

distincts

b) x_1 est une racine de (E)

alors : $a x_1^2 + x_1 - a = 0$

$x_1 - a = -a\,x_1^2$

Si $a < 0$ Alors $x_1 - a > 0$

$x_1 > a$ Donc $\frac{x_1}{a} < 1$

Si $a > 0$ Alors $x_1 - a < 0$

$x_1 < a$ Donc $\frac{x_1}{a} < 1$

Pour tt $a \in \mathbb{R}^*$: $\frac{x_1}{a} < 1$

2) a) $T'(x) = x^2 + bx - 1$

Les coefficient de x^2 et le coefficient constant du trinôme $T'(x)$ sont de signe contraire ($ac < 0$)

Donc $T'(x)$ admet deux racines distinctes

b) x' est une racine de $T'(x)$

alors : $x'^2 + bx' - 1 = 0$ $\quad (x' \neq 0)$

$bx' - 1 = -x'^2 < 0$;

d'où $1 > bx'$

3) x_1 et x_2 sont les racines de $T(x)$ donc $x_1 \cdot x_2 = -1$

x' et x'' sont les racines de $T'(x)$ donc $x' \cdot x'' = -1$

d'où $x_1 x_2 = x' x''$

puisque $x_1 = x'$ Alors $x_2 = x''$

$(x_1 \neq 0$ et $x' \neq 0)$

4) a) $x_1 + x_2 + x' + x'' = 0$

$(x_1 + x_2) + (x' + x'') = 0$

$-\frac{1}{a} - \frac{b}{1} = 0$

Donc $\boxed{ab = -1}$

b) $T(2) = T(-3)$

$4a + 2 - a = 9 - 3b - 1$

$3a + 2 = 8 - 3b$

$\boxed{a + b = 2}$

Bel Modo di Vivere

a et b sont les solutions de l'équation

$$X^2 - 2X - 1 = 0 \quad \text{tel que } a < b$$

$$\Delta = 8 > 0$$

$$x_1 = 1 - \sqrt{2} \text{ et } x_2 = 1 + \sqrt{2}$$

Donc $a = 1 - \sqrt{2}$ et $b = 1 + \sqrt{2}$.

Exercice 4 :

1) $S_{\mathbb{R}} = \{2 ; 5\}$

2) $S_{\mathbb{R}^2} = \{(10 ; 7)\}$

3) Posons $tz = a$ et $t + z = b$

$$\begin{cases} 2tz + 3(t+z) = 41 \\ 2tz + t + z = 27 \end{cases} \text{ éq } \begin{cases} 2a + 3b = 41 \\ 2a + b = 27 \end{cases}$$

$$\text{éq } \begin{cases} a = 10 \\ b = 7 \end{cases} \text{ éq } \begin{cases} tz = 10 \\ t + z = 7 \end{cases}$$

Puisque 2 et 5 sont les solutions de l'équation $x^2 - 7x + 10 = 0$

Alors $(t ; z) \in \{(2 ; 5) ; (5 ; 2)\}$.

Exercice 5 :

Posons $x + y = a$ et $xy = b$

$$\begin{cases} x + y + xy = -3 \\ x^2y + xy^2 = 2 \end{cases} \text{ éq } \begin{cases} a + b = -3 \\ ba = 2 \end{cases}$$

Soit l'équation $t^2 + 3t + 2 = 0$

$a - b + c = 0$ Donc $t_1 = -1$ et $t_2 = -2$

Alors $\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -2 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x + y = -2 \\ xy = -1 \end{cases}$

Soit l'équation $z^2 + z - 2 = 0$ $\quad$ Soit l'équat $\omega^2 + 2\omega - 1 = 0$

$z_1 = 1$ et $z_2 = -2$ $\quad$ $\omega_1 = -1 - \sqrt{2}$ et $\omega_2 = -1 + \sqrt{2}$

$$S_{\mathbb{R}^2} = \{(1 ; -2) ; (-2 ; 1) ; (-1-\sqrt{2} ; -1+\sqrt{2}) ; (-1+\sqrt{2} ; -1-\sqrt{2})\}.$$