LPS : 2sc	Série d'exercices	Mr Hadjkacem

15

Exercice 1 :

Soit n un entier naturel supérieur à 1

P le polynome défini par $P(x) = (x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$

Montrer que P est factorisable par $x(x+1)(2x+1)$

Exercice 2 :

Soit P le polynome défini par $P(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

1) *Montrer que pour tout réel x ,* $P(x) = x^2 + (x+1)^2 + (x^2+x)^2$

2) *Factoriser alors* $P(x)$ *et déduire que le polynome P n'admet pas de racines*

3) Résoudre dans IR : $P(x) = 9{,}1^2$

Exercice 3 :

Soit le polynome P défini par $P(x) = x^4 - x^2 + x + 0{,}5$

Montrer que le polynome P n'admet pas de racines positives

Exercice 4:

Soit P , Q et R trois polynomes non nuls tels ques $d°(P \times Q) = 8$, $d°(P \times Q \times R) = 9$ *et* $d°(Q + R) = 5$

Déterminer le degré de chacun des polynomes P, Q et R

Exercice 5:

1) *Soit a et b deux entiers relatifs*

Montrer que : $a + b\sqrt{2} = 0$ *si et seulement si* $a = 0$ *et* $b = 0$

2) *Soit le polynome P défini par* $P(x) = x^3 + (1 + 3\sqrt{2})x^2 + 4\sqrt{2}\,x + 6$

Sachant que P admet une racine de la forme $\alpha\sqrt{2}$ *où* α *est un entier , déterminer cette racine et montrer que c'est l'unique racine de P*

Exercice 6:

1) *Soit* $p(x) = 2x^3 - 4x^2 - 24x + 48$

Factoriser $p(x)$

2) *Soit* $R(x) = \dfrac{p(x)}{|x^2-4| - 4 + x^2}$

Résoudre l'inéquation $3R(x) + 13 \geq 0$

Lycée F H Sfax
2020-2021

Série d'exercices (Polynômes)

Prof : Hadj Kacem
2 SC

Exercice 1 :

Le polynôme P est factorisable par $x(x+1)(2x+1)$ ssi 0, -1 et $-\frac{1}{2}$ sont des racines de P

car $x(x+1)(2x+1) = 2(x-0)(x-(-1))(x-\frac{1}{2})$

• $P(0) = 1^{2n} - 0^{2n} - 2\times 0 - 1 = 0$ Donc 0 est une racine de P

• $P(-1) = 0^{2n} - (-1)^{2n} - 2\times(-1) - 1$
$= -1 + 2 - 1 = 0$; ($2n$ est pair)

Donc (-1) est une racine de P.

• $P(-\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^{2n} - (-\frac{1}{2})^{2n} - 2\times(-\frac{1}{2}) - 1$
$= (\frac{1}{2})^{2n} - (\frac{1}{2})^{2n} + 1 - 1$, ($2n$ pair)
$= 0$

Donc $(-\frac{1}{2})$ est une racine de P.

Cl : 0, -1 et $-\frac{1}{2}$ sont des racines de P

Par suite P est factorisable par $x(x+1)(2x+1)$.

Exercice 2 :

1) Pour $\forall x \in \mathbb{R}$: $x^2 + (x+1)^2 + (x^2+x)^2$
$= x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^4 + 2x^3 + x^2$
$= x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = P(x)$

Donc $P(x) = x^2 + (x+1)^2 + (x^2+x)^2$

2) Pour $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = [x-(x+1)]^2 + 2x(x+1) + (x^2+x)^2$
$= 1 + 2(x^2+x)\times 1 + (x^2+x)^2$

Donc $P(x) = (x^2+x+1)^2$

• $P(x) = 0$ équivaut $x^2+x+1 = 0$
$\Delta = -3 < 0$

Donc $P(x)$ n'admet pas de racines

3) $P(x) = 91^2$ équivaut $(x^2+x+1)^2 = 91^2$

équivaut : $x^2+x+1 = 91$ ou $x^2+x+1 = -91$

$x^2+x-90=0$ | $x^2+x+92=0$

$\Delta = 361 > 0$ | $\Delta = 1-368 < 0$

$x=-10$ ou $x=9$

Donc $S_{\mathbb{R}} = \{-10 ; 9\}$

Exercice 3 :

$P(x) = x^4 - x^2 + x + 0,5$

• Pour $x \in [0;1]$: $x \geq x^2$

Donc $x - x^2 \geq 0$

or $x^4 \geq 0$

D'où $x^4 - x^2 + x \geq 0$

$x^4 - x^2 + x + 0,5 \geq 0,5$

Donc $P(x) \geq 0,5$

Alors $P(x) \neq 0$, pour $\forall x \in [0;1]$

Ainsi P n'admet pas de racine dans $[0;1]$

• Pour $x \in [1;+\infty[$: $x^4 \geq x^2$

Donc $x^4 - x^2 \geq 0$

or $x \geq 1$

D'où $x^4 - x^2 + x \geq 1$

$x^4 - x^2 + x + 0,5 \geq 1,5$

Donc $P(x) \geq 1,5$

Alors $P(x) \neq 0$, pour $\forall x \in [1;+\infty[$

Ainsi P n'admet pas de racine dans $[1;+\infty[$

Conclusion : P n'admet pas de racine dans $\mathbb{R}_+$ $([0;1] \cup [1;+\infty[= \mathbb{R}_+)$

Exercice 4 :

1) $d°(P\times Q\times R) = d°(P\times Q) + d°(R)$

$9 = 8 + d°(R)$

Donc $d°(R) = 1$

2) $d°(Q+R) = 5$ et $d°(R) = 1$

Donc $d°Q = 5$; $d°(Q+R) \leq \max(d°Q ; d°R)$

3) $d°(P\times Q) = 8$

$d°(P) + d°(Q) = 8$

$d°(P) + 5 = 8$

Donc $d°(P) = 3$

Exercice 5 :

1) " $\Leftarrow$ " si $a=0$ et $b=0$ alors $a+b\sqrt{2}=0$

" $\Rightarrow$ " si $a+b\sqrt{2}$ alors $b\sqrt{2}=-a$

Dans le cas où $b\neq 0$, on trouve $\sqrt{2} = -\frac{a}{b}$ cette égalité est impossible car $-\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ et $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Donc forcément $b=0$ et par suite $a=0$

Conclusion : $a+b\sqrt{2}=0$ ssi $a=0$ et $b=0$
$(a\in\mathbb{Z} ; b\in\mathbb{Z})$

2) • $\alpha\sqrt{2}$ est une racine de P

équivaut $(\alpha\sqrt{2})^3 + (1+3\sqrt{2})(\alpha\sqrt{2})^2 + 4\sqrt{2}(\alpha\sqrt{2}) + 6 = 0$

équivaut $2\alpha^3\sqrt{2} + 2\alpha^2 + 6\alpha^2\sqrt{2} + 8\alpha + 6 = 0$

équivaut $2\alpha^2 + 8\alpha + 6 + (2\alpha^3 + 6\alpha^2)\sqrt{2} = 0$

$(2\alpha^2+8\alpha+6)\in\mathbb{Z}$

$(2\alpha^3+6\alpha^2)\in\mathbb{Z}$

équivaut $2\alpha^2+8\alpha+6=0$ et $2\alpha^3+6\alpha^2=0$

$\alpha=-1$ ou $\alpha=-3$ | $\alpha=0$ ou $\alpha=-3$

Donc $\alpha=-3$

Par suite $(-3\sqrt{2})$ est une racine de P.

c) $(-3\sqrt{2})$ est une racine de P

Donc pour $\forall x \in \mathbb{R}$: $P(x) = (x+3\sqrt{2})(ax^2+bx+c)$; $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$

$$P(x) = ax^3 + (b+3a\sqrt{2})x^2 + (c+3\sqrt{2}b)x + 3\sqrt{2}c$$

Par identification des coeff respectifs, on trouve

$$\begin{cases} a = 1 \\ b+3a\sqrt{2} = 1+3\sqrt{2} \\ c+3\sqrt{2}\,b = 4\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2}\,c = 6 \end{cases} \quad \text{Donc} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=\sqrt{2} \end{cases}$$

Ainsi $P(x) = (x+3\sqrt{2})(x^2+x+\sqrt{2})$, pour $\forall x \in \mathbb{R}$

$P(x)=0$ équivaut à $x+3\sqrt{2}=0$ ou $x^2+x+\sqrt{2}=0$

$x=-3\sqrt{2}$; $\Delta = 1-4\sqrt{2} < 0$

Donc $(-3\sqrt{2})$ est l'unique racine de P

Exercice 6 :

1) $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 24x + 48$

$= 2x^2(x-2) - 24(x-2)$

$P(x) = 2(x-2)(x^2-12)$

2) Condition $|x^2-4| - 4 + x^2 \neq 0$

$|x^2-4| \neq 4 - x^2$

$x^2-4>0$ équivaut à $x \in]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$

Dans $\mathbb{R}\setminus[-2;2]$: $x^2-4>0$ Donc $|x^2-4| = x^2-4$

$$R(x) = \frac{P(x)}{|x^2-4|-4+x^2} = \frac{2(x-2)(x^2-12)}{2(x^2-4)}$$

$$= \frac{x^2-12}{x+2}$$

$3R(x)+13 \geq 0$ équivaut à $\frac{3(x^2-12)}{x+2}+13 \geq 0$ équivaut à $\frac{3x^2+13x-10}{x+2} \geq 0$

$3x^2+13x-10$ s'annulle en -5 et $\frac{2}{3}$; On dresse un tableau de signe

$x+2$ s'annulle en -2

et on trouve $S_{\mathbb{R}} = ([-5;-2[\cup [\frac{2}{3};+\infty[) \cap (\mathbb{R}\setminus[-2;2])$

$= [-5;-2[\cup]2;+\infty[$.