Exercice N°7

1. Dans un repère orthonormé du plan, soient les points $A(68, 46)$, $B(5, 30)$ et $C(20, 10)$. Calculer l'angle $\widehat{BAC}$ arrondi à l'unité en degré.
2. Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien du plan, $E(4, 2)$, $F(8, 11)$, et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.
   Justifier que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base pour l'ensemble des vecteurs, puis calculer les coordonnées de F dans le repère $(E, \vec{u}, \vec{v})$.
3. Dans un repère orthonormé du plan, soient $A(9, 4)$, $B(2, 11)$ et $C(11, 8)$. Calculer les coordonnées du centre et le rayon du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC.
4. Soit ABC un triangle. On définit les points D, M et N par :
   $$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{AN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}.$$
   Les points D, M et N sont-ils alignés ? Justifier.

Exercice N°9

Soit un triangle ABC et P le milieu du segment $[AB]$.

1. Construire les points Q et R tels que :
   $$\overrightarrow{BQ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CR} = \frac{4}{5}\overrightarrow{CA}.$$
2. Montrer que les points P, Q et R sont alignés.

Exercice N°13

Soit $ABCD$ un carré de centre O. On désigne par I, J et E les points définis par :
$$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}, \quad \overrightarrow{AJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{BE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}.$$

1. Faire une figure.
2. (a) Montrer que :
   $$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}.$$
   (b) En déduire que les points O, I et J sont alignés.
3. (a) Justifier que la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est orthonormée.
   (b) Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{EJ}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
   (c) En déduire que $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{EJ}$ sont parallèles.
   (d) Montrer que le quadrilatère $OECJ$ est un losange.

Exercice N°17

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On note I le milieu de $[AD]$ et E le centre de gravité du triangle ACD. On définit le point F par $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$, et K désigne le milieu de $[EB]$.

1. Démontrer que :
   $$\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}.$$
2. Démontrer que les points I, K et F sont alignés.
3. Soit L défini par $\overrightarrow{AL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, et M le milieu de $[CD]$. Démontrer que les points L, K et M sont alignés.

Exercice N°18

On considère un trapèze $ABCD$ tel que $DC = 3AB$.

1. Placer les points I et J définis par :

$$\overrightarrow{DI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA}, \quad \overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}.$$

2. (a) Vérifier que $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$ et que $2\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$.
   (b) Montrer que $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{IJ}$.
   (c) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
3. (a) Placer le point C' tel que $\overrightarrow{AC'} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$.
   (b) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{DC'}$ à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{AB}$.
   (c) En déduire que les points D, J et C' sont alignés.
4. Soit B' le symétrique de B par rapport à A. Montrer que :

$$\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IB'} = \vec{0}.$$

5. Soit x un réel et M le point défini par :

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB'} = x\overrightarrow{AB}.$$

   (a) Montrer que $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB'} = 3\overrightarrow{MI}$.
   (b) Sur quelle ligne fixe se déplace M lorsque x varie ?
   (c) Pour quelle valeur de x, M appartient-il à la droite (BC) ?

Exercice N°19

Soit ABC un triangle, I le milieu de $[AB]$ et J le point défini par :

$$\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}.$$

1. Montrer que pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MJ}.$$

2. Montrer que $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$, puis construire le point J.
3. Exprimer $\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
4. Soit K le point défini par :

$$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

   Montrer que J est le milieu de $[BK]$.
5. Soit L le point tel que :

$$\overrightarrow{LB} + 2\overrightarrow{LK} = \vec{0}.$$

   (a) Exprimer $\overrightarrow{BL}$ en fonction de $\overrightarrow{BK}$.
   (b) Montrer que $\overrightarrow{LA} + 2\overrightarrow{LC} = \vec{0}$, puis déduire que les points L, A et C sont alignés.
   (c) Placer le point L.

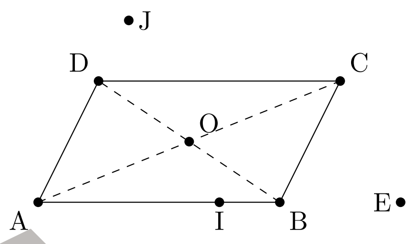
Série d'exercices - Géométrie

Exercice 1 - Parallélogramme et vecteurs

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O. On donne les points I, J, E définis par :

$$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}, \quad \overrightarrow{AJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{BE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

1. Faire une figure.



2. Montrer que :

$$\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

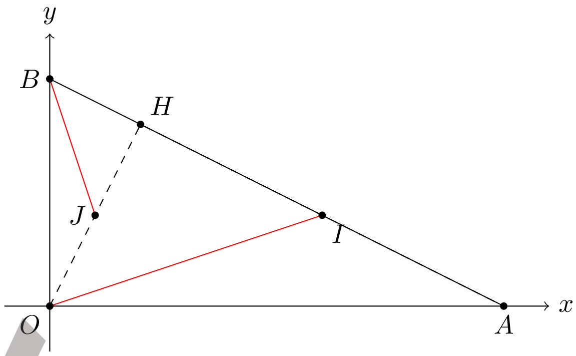
$$\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$$

3. En déduire que les points O, I et J sont alignés.
4. Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{EJ}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
5. Montrer que les droites (BD) et (EJ) sont parallèles.

Exercice 2

On considère les points $A(10;0)$ et $B(0;5)$.

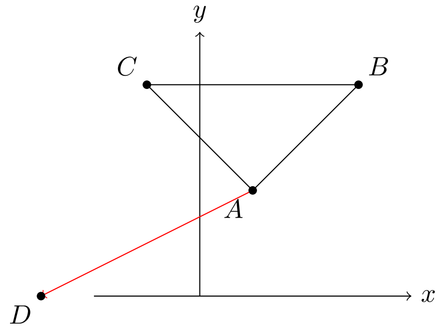
1. Montrer que le triangle OAB est rectangle.
2. Pour tout réel a, soit $H(2a;-a+5)$.
   (a) Montrer que H appartient à la droite (AB).
   (b) Déterminer a pour que la droite (OH) soit perpendiculaire à (AB).
3. Dans la suite, on pose $H(2;4)$. Soient I et J les milieux respectifs de $[AH]$ et $[OH]$.
   (a) Montrer que les droites (OI) et (BJ) sont perpendiculaires.



Exercice 3 - Repère orthonormé

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ et $C(-1, 4)$.

1. Montrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ forme une base.
2. (a) Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.
   (b) Calculer AB et AC puis déterminer la nature du triangle ABC.
3. (a) Déterminer les coordonnées du point D vérifiant $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$.
   (b) Donner les coordonnées de D dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

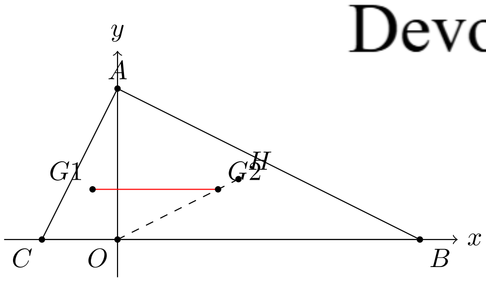


Exercice 4 - Projection et centres de gravité

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne les points $A(0,4)$, $B(8,0)$ et $C(-2,0)$.

1. (a) Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
   (b) Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.
   (c) Calculer l'aire du triangle ABC.
2. Soit H le projeté orthogonal de O sur (AB).
   (a) Montrer que $\overrightarrow{OH} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$.
   (b) Déterminer les coordonnées de H.
3. Soient G_1 et G_2 les centres de gravité des triangles OAC et OAB respectivement.
   (a) Déterminer leurs coordonnées.
   (b) Montrer que $\overrightarrow{G_1G_2}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

Devoiratna ©2025



Devoiratna
Devoiratna ©2025

Exercice 5 - Base orthonormée

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée.

1. Soient :

$$\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i}$$

$$\vec{v} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$$

   Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée.

2. Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points :

$$A(-2;1), B(3;-2), C(6;3), D(4;2.5)$$

   (a) Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.
   (b) Montrer que A, C et D sont alignés.
   (c) Calculer les distances AB et BC puis l'aire du triangle ABC.