LPS : 2sc | Série d'exercices | Mr Hadjkacem

Exercice 1 :

I/ Soit (u_n) la suite définie sur IN par $u_n = 2n-3$

1) Montrer que la suite (u_n) est arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme

2) a) Soit $n \in IN$. Exprimer en fonction de n la somme $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

b) Déduire la somme de tous les termes de la suite (u_n) qui sont inférieurs à 100

3) Soit A la somme des vingt premiers termes de la suite u d'indices pairs et B la somme des vingt premiers termes de u d'indices impairs

Calculer $A-B$ et $A+B$ puis déduire les valeurs de A et B

Ii/ Soit (v_n) la suite définie sur IN et telles que la somme de ces cinq premiers termes est 40 et que son deuxième terme vaut 5

1) Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n et vérifier que v_n est un entier naturel

2) Déterminer le plus grand terme de la suite (v_n) à trois chiffres

III/ Soit (w_n) la suite arithmétique définie sur IN par $w_n = 6n^2 - 5n - 6$

1) a) Calculer w_0 , w_1 et w_2

b) Montrer que la suite (w_n) n'est pas arithmétique

2) a) Vérifier que pour tout $n \in IN$, $w_n = u_n \times v_n$

b) Calculer la somme $S = \frac{w_0}{2} + \frac{w_1}{5} + \frac{w_2}{8} + \cdots + \frac{w_9}{29} + \frac{w_{10}}{32}$

Exercice 2 :

Soit u la suite arithmétique, définie sur IN , de raison r et telles que $u_1 + u_5 = -6$ *et* $u_{10} = -17$

1) a) *Calculer* u_0 *et* r

b) *Calculer* u_{99} *et* u_{51}

2) a) *Calculer la somme des cent premiers termes de la suite u*

b) *Calculer la somme* S' *de tous les termes de la suite u qui sont supérieur à* (-100)

Lycée Pilote Farhat Hached Sfax — Série d'exercices (Suites réelles) — Mr Hadj Kacem — 2 Sc

2020 — 2021

Exercice 1 :

I/ 1) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+1} - U_n = [2(n+1) - 3] - [2n - 3] = 2$$

2 est indépendant de n donc la suite U est arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $U_0 = -3$.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \frac{(n+1)}{2}(U_0 + U_n)$$

Donc $S_n = (n+1)(n-3)$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et U_n un terme de la suite (U_n) inférieur à 100

Donc $U_n < 100$ équivaut à $2n - 3 < 100$

équivaut à $n < \frac{103}{2}$ or $n \in \mathbb{N}$ donc $n \leq 51$

donc les termes de la suite U inférieurs à 100 sont $U_0, U_1, \dots, U_{51}$ et leur somme est

$$U_0 + U_1 + \dots + U_{51} = S_{51} = (51+1)(51-3) = 2496$$

3) $A = U_0 + U_2 + U_4 + \dots + U_{36} + U_{38}$

et $B = U_1 + U_3 + U_5 + \dots + U_{37} + U_{39}$

- $A - B = (U_0 - U_1) + (U_2 - U_3) + (U_4 - U_5) + \dots + (U_{38} - U_{39})$

$= (-r) + (-r) + (-r) + \dots + (-r)$

$= 20 \times (-r)$ donc $A - B = -40$

- $A + B = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_{38} + U_{39}$

$= S_{39}$ donc $A + B = 1440$

$\left\{\begin{array}{l} A - B = -40 \\ A + B = 1440 \end{array}\right.$ équivaut à $\left\{\begin{array}{l} 2A = 1400 \\ 2B = 1480 \end{array}\right.$ équivaut à $\left\{\begin{array}{l} A = 700 \\ B = 740 \end{array}\right.$

II / 1) • La suite V est définie sur $\mathbb{N}$ et arithmétique de raison r, la somme des cinq premiers termes est 40 et son deuxième terme est 5

équivaut à $\left\{\begin{array}{l} \frac{5}{2}(V_0 + V_4) = 40 \\ V_1 = 5 \end{array}\right.$ équivaut à $\left\{\begin{array}{l} V_0 + (V_0 + 4r) = 16 \\ V_0 + r = 5 \end{array}\right.$

équivaut à $\left\{\begin{array}{l} V_0 + 2r = 8 \\ V_0 + r = 5 \end{array}\right.$ équivaut à $\left\{\begin{array}{l} r = 3 \\ V_0 = 2 \end{array}\right.$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_0 + nr$

$V_n = 2 + 3n$

• $n \in \mathbb{N}$ donc $2 + 3n \in \mathbb{N}$ puisque $1 \in \mathbb{N}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, $V_n \leq 999$

$2 + 3n \leq 999$

$3n \leq 997$

$n \leq \frac{997}{3}$ or $n \in \mathbb{N}$ donc $n \leq 332$

Le plus grand terme de (V_n) à trois chiffres correspond à $n = 332$ soit $V_{332} = 998$

III/ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 6n^2 - 5n - 6$.

1) a) $w_0 = -6$; $w_1 = -5$ et $w_2 = 8$

b) $w_1 - w_0 = 1$ et $w_2 - w_1 = 13$

$w_1 - w_0 \neq w_2 - w_1$ Donc w n'est pas arithmétique.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$u_n \cdot v_n = (2n - 3) \cdot (2 + 3n)$

$= 6n^2 - 5n - 6 = w_n$

Donc $w_n = u_n \cdot v_n$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2 + 3n$.
d'où $2 = v_0$, $5 = v_1$, $8 = v_2, \dots, 29 = v_9$ et $32 = v_{10}$

Ainsi $S = \frac{w_0}{v_0} + \frac{w_1}{v_1} + \frac{w_2}{v_2} + \dots + \frac{w_9}{v_9} + \frac{w_{10}}{v_{10}}$

$= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_9 + u_{10}$, $\left(\frac{w_n}{v_n} = u_n, n \in \mathbb{N}\right)$

d'où $S = S_{10} = 77$, $\left(S_n = (n+1)(n-3)\right)$

Exercice 2 :

u suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$, de raison r.

1) a) $\begin{cases} u_1 + u_5 = -6 \\ u_{10} = -17 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} (u_0 + r) + (u_0 + 5r) = -6 \\ u_0 + 10r = -17 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} u_0 + 3r = -3 \\ u_0 + 10r = -17 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} r = -2 \\ u_0 = 3 \end{cases}$

b) $u_{99} = u_0 + 99r$ et $u_{51} = u_0 + 51r$
Donc $u_{99} = -195$ et $u_{51} = -99$

2) a) Soit S la somme des cent premiers termes de u
Donc $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{99}$ (u définie sur $\mathbb{N}$)
$= \frac{100}{2}(u_0 + u_{99})$

$= 50(3 - 195)$

D'où $S = -9600$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n > -100$ équivaut à $u_0 + nr > -100$
équivaut à $-2n + 3 > -100$ équivaut à $n < \frac{103}{2}$

On a $n \in \mathbb{N}$ donc $n \in \{0, 1, \dots, 50, 51\}$

D'où $S' = u_0 + u_1 + \dots + u_{50} + u_{51} = \frac{52}{2}(u_0 + u_{51})$ donc $S' = -2496$.

L-P-F-H-Sfax : 2sc | Série d'exercices | Mr Hadjkacem

Exercice 1 :

Soit u la suite définie sur IN par $u_n = 3n + 1$

1) Montrer que la suite u est arithmétique et préciser sa raison et son premier terme

2) Soit p un entier naturel .

Montrer que $(12p + 4)$ est un terme de la suite u puis indiquer en fonction de p son rang

3) Soit $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, $n \in IN^*$

a) Exprimer S_n en fonction de n

b) Déterminer n sachant que $S_n = 650$

4) Soit v la suite définie sur IN par $v_n = u_{3n}$

a) Montrer que la suite v est arithmétique et préciser sa raison et son premier terme

b) Calculer alors lasomme $A = u_0 + u_3 + u_6 + + \cdots + u_{27} + u_{30}$

5) Soit la suite w définie sur IN par $w_n = n^2$

a) Calculer w_0 , w_1 et w_2 puis déduire que la suite w n'estpas arithmétique

b) Montrer que pour tout entier naturel n , $(n+1)^3 - n^3 = 3w_n + u_n$

c) Calculer alors la somme $B = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 13^2 + 14^2 + 15^2$

Exercice 2 :

Soit u une suite à termes positifs définie sur IN par $u_0 = 2$

et pour tout entier naturel n , $u_{n+1}^2 - u_n^2 = 5$

1) Calculer u_1 et u_2 et déduire que la suite u n'estpas arithmétique

2) Soit la suite v définie sur IN par $v_n = u_n^2$

a) Montrer que la suite v est arithmétique et préciser sa raison et son premier terme

b) Exprimer v_n en fonction de n puis déduire le terme général de la suite u

3) Calculer la somme $S = \dfrac{1}{u_1 + u_0} + \dfrac{1}{u_2 + u_1} + \dfrac{1}{u_3 + u_2} + \cdots + \dfrac{1}{u_{19} + u_{18}} + \dfrac{1}{u_{20} + u_{19}}$

Lycée Pilote Farhat Hached Sfax — Série d'exercices (Suites réelles) — Mr Hadj Kacem

A-S 2020-2021 — 2 Sc

Exercice 1 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+1} - U_n = 3(n+1) + 1 - 3n - 1$$
$$= 3$$

3 est indépendant de n donc la suite U est arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $U_0 = 1$ (U déf sur $\mathbb{N}$)

2) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = 12p + 4$$
$$3n + 1 = 12p + 4$$
$$n = 4p + 1$$

Puisque p est un entier naturel alors $4p+1$ appartient aussi à $\mathbb{N}$ donc $12p + 4 = U_{4p+1}$ est un terme de la suite d'indice $(4p+1)$ et de rang $(4p+2)$

3) a) $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n) = \frac{n}{2}(4 + 3n + 1)$$

d'où $S_n = \dfrac{n(3n+5)}{2}$

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = 650$

ssi $n(3n+5) = 1300$

ssi $3n^2 + 5n - 1300 = 0$

$\Delta = 15625 > 0$

$n = -\frac{65}{3} \notin \mathbb{N}$ ou $n = 20 \in \mathbb{N}$

donc $S_n = 650$ se réalise uniquement pour $n = 20$.

6

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$v_n = u_{3n} = 3(3n)+1 = 9n+1$

$v_{n+1} - v_n = [9(n+1)+1] - [9n+1]$

$= 9$

9 est indépendant de n, donc v est une suite arithmétique de raison $r' = 9$ et de premier terme $v_0 = 1$, (v définie sur $\mathbb{N}$)

b) $A = u_0 + u_3 + u_6 + \dots + u_{27} + u_{30}$

$= u_{3\cdot 0} + u_{3\cdot 1} + u_{3\cdot 2} + \dots + u_{3\cdot 9} + u_{3\cdot 10}$

$= v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_9 + v_{10}$

$= \frac{11}{2}(v_0 + v_{10})$

$= \frac{11}{2}(1+91)$ d'où $A = 506$

5) a) $w_0 = 0$, $w_1 = 1$ et $w_2 = 4$

$w_1 - w_0 = 1$ et $w_2 - w_1 = 3$

Donc $w_1 - w_0 \neq w_2 - w_1$ Alors w n'est pas arithmétique

b) Soit $n \in \mathbb{N}$

$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$

Donc $(n+1)^3 - n^3 = 3w_n + u_n$

c) $B = 1^2 + 2^2 + \dots + 14^2 + 15^2$

donc $B = w_1 + w_2 + \dots + w_{14} + w_{15}$

$3B = 3w_1 + 3w_2 + \dots + 3w_{14} + 3w_{15}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3w_n = (n+1)^3 - n^3 - u_n$

donc $3B = [2^3 - 1^3 - u_1] + [3^3 - 2^3 - u_2] + \dots + [15^3 - 14^3 - u_{14}] + [16^3 - 15^3 - u_{15}]$

d'où $3B = 16^3 - 1^3 - (u_1 + u_2 + \dots + u_{15})$

$= 16^3 - 1 - S_{15}$

Comme $S_{15} = \frac{15\cdot(4+46)}{2} = 375$

d'où $3B = 3720$ Par suite $B = 1240$.

Exercice 2 :

1) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}^2 - u_n^2 = 5$ et $u_n > 0$

Pour $n = 0$ Alors $u_1^2 - u_0^2 = 5$

$u_1^2 = 9$ d'où $u_1 = 3$

Pour $n = 1$ Alors $u_2^2 - u_1^2 = 5$

$u_2^2 = 14$ d'où $u_2 = \sqrt{14}$

b) $u_1 - u_0 = 1$ et $u_2 - u_1 = \sqrt{14} - 3$

Donc $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$

Par suite la suite u n'est pas arithmétique.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$

$v_{n+1} - v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2 = 5$ (c'est une constante indépendante de n)

Donc la suite v est arithmétique et de raison 5, de premier terme $v_0 = u_0^2 = 4$

b) • v est une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme $v_0 = 4$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + 5n$

d'où $v_n = 4 + 5n$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 4 + 5n$

donc $u_n^2 = 4 + 5n$

Par suite $u_n = \sqrt{4 + 5n}$ ($u_n > 0$)

3) • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}^2 - u_n^2 = 5$

Donc $(u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n) = 5$

d'où $\dfrac{1}{u_{n+1} + u_n} = \dfrac{1}{5}(u_{n+1} - u_n)$, $u_{n+1} + u_n \neq 0$

$$S = \frac{1}{u_1+u_0} + \frac{1}{u_2+u_1} + \dots + \frac{1}{u_{19}+u_{18}} + \frac{1}{u_{20}+u_{19}}$$

$$= \frac{1}{5}\left(u_1-u_0\right) + \frac{1}{5}\left(u_2-u_1\right) + \dots + \frac{1}{5}\left(u_{19}-u_{18}\right) + \frac{1}{5}\left(u_{20}-u_{19}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(u_{20} - u_0\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(\sqrt{104} - 2\right) \quad \left(u_n = \sqrt{4+5n}\,;\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}\right)$$

Par suite $S = \frac{2}{5}\left(\sqrt{26} - 1\right)$