LPS : 2sc	Série d'exercices	Mr Hadjkacem

Exercice 1 :

Soit u une suite de nombres réels définie sur IN

On pose $P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$ et on suppose que $P_n = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$

1) Calculer u_0 et u_1

2) a) Soit $n \in IN^*$, exprimer P_{n-1} en fonction de n

b) Déduire u_n en fonction de n , pour tout $n \in IN$

c) Montrer que la suite u est géométrique

3) Déterminer n sachant que $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 4095$

Exercice 2 :

On considère les suites U et V définies sur IN par $U_n = \sqrt{3^n}$ et $V_n = 3 \times 2^{3n+1}$

1)a) Montrer que la suite U est géométrique

b) Montrer que 729 est un terme de la suite U

2) On pose $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ et $T_n = S_0 + S_1 + \cdots + S_n$, $n \in IN$

a) Exprimer S_n en fonction de n

b) Montrer que $(\sqrt{3} - 1)T_n + n + 1 = \sqrt{3} \times S_n$ puis calculer T_5

3) a) Montrer que la suite V est géométrique

b) *Déterminer l'entier naturel n pour que* $V_0 + V_1 + \cdots + V_n = 224694$

4) Soit X la suite géométrique de premier terme $X_0 = 6$ et de raison q $(q < 0)$

et Y la suite définie sur IN par $Y_n = \frac{V_n}{X_n}$

a) Montrer que la suite Y est géométrique et préciser sa raison en fonction de q

b) Sachant que le produit des cinq premiers termes de la suite Y vaut 1048576,

Déterminer le terme général de la suite Y

Lycée Pilote F-H Sfax
A-S 2020-2021

Série d'exercices
(Mathématiques)

2SC
Mr : Hadjkacem

Exercice 1 :

1) • $P_0 = U_0$ et $P_0 = 2^0 = 1$

Donc $U_0 = 1$

• $P_1 = U_0 \times U_1$ et $P_1 = 2^1 = 2$

Donc $U_0 \times U_1 = 2$

d'où $U_1 = 2$

2) a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n-1} = 2^{\frac{(n-1)(n-1+1)}{2}}$

Donc $P_{n-1} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$

b) • Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$P_n = [U_0 \times U_1 \times \dots \times U_{n-1}] \times U_n$

$= P_{n-1} \times U_n$

Donc $U_n = \frac{P_n}{P_{n-1}}$, $(P_{n-1} \neq 0)$

$= \frac{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} = 2^n$

Donc Pour $n \in \mathbb{N}^*$; $U_n = 2^n$

• Pour $n = 0$, $U_0 = 1 = 2^0$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2^n$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2^{n+1} = 2^n \times 2 = 2u_n$$

Donc $u_{n+1} = 2u_n$

Par suite u est une suite géométrique de raison $q = 2$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$; $u_0 + u_1 + \dots + u_n = 4095$

$$u_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 4095 \; ; \; (q \neq 1)$$

$$2^{n+1} - 1 = 4095$$

$$2^{n+1} = 4096$$

$$2^{n+1} = 2^{12}$$

Donc $n - 11 = 0$ $\quad (2^{n-11} = 1)$

Par suite $n = 11$

Exercice 2 :

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \sqrt{3^{n+1}} = \sqrt{3^n \times 3} = \sqrt{3}\,\sqrt{3^n} = \sqrt{3}\, u_n$$

Donc $u_{n+1} = \sqrt{3}\, u_n$. u est une suite géométrique de raison $q = \sqrt{3}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$:

$u_n = 729$

équivaut : $\sqrt{3^n} = 729$

équivaut : $3^n = 729^2$

équivaut : $3^n = 3^{12}$ $\quad (729 = 3^6)$

équivaut : $3^{n-12} = 1$

équivaut : $n - 12 = 0$ équivaut : $n = 12 \in \mathbb{N}$

Donc $729 = u_{12}$ et 729 est bien un terme de la suite u.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$: $S_n = u_0 \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$; $(q \neq 1)$

Donc $S_n = \frac{\sqrt{3}^{n+1}-1}{\sqrt{3}-1}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \frac{u_{n+1}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}\,u_n-1}{\sqrt{3}-1}$

$(\sqrt{3}-1) \cdot T_n = (\sqrt{3}-1) \cdot (S_0+S_1+\dots+S_n)$

$= (\sqrt{3}-1) \cdot \left[\frac{\ldots-1}{\sqrt{3}-1} + \frac{\ldots-1}{\sqrt{3}-1} + \dots + \frac{\ldots-1}{\sqrt{3}-1}\right]$

$= (u_1-1)+(u_2-1)+\dots+(u_n-1)+(u_{n+1}-1)$

$= \sqrt{3}(u_0+u_1+\dots+u_n) - (n+1)$

$= \sqrt{3} \cdot S_n - (n+1)$

Donc $(\sqrt{3}-1) \cdot T_n + n + 1 = \sqrt{3} \cdot S_n$

- Pour $n = 5$: $(\sqrt{3}-1)T_5 + 6 = \sqrt{3}\, S_5$

Donc $T_5 = \frac{\sqrt{3} \cdot S_5 - 6}{\sqrt{3}-1}$

or $S_5 = \frac{\sqrt{3}^6-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{26}{\sqrt{3}-1} = 13(\sqrt{3}+1)$

Donc $T_5 = \frac{39+13\sqrt{3}-6}{\sqrt{3}-1} = 23\sqrt{3}+36$.

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = 3 \times 2^{3(n+1)+1} = 3 \times 2^{3n+1} \times 2^3$

d'où $v_{n+1} = 8\, v_n$

Donc la suite v est géométrique de raison $q = 8$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$: $V_0 + V_1 + \dots + V_n = 224\,694$

équivaut à $V_0 \cdot \dfrac{q'^{n+1} - 1}{q' - 1} = 224\,694$

$6 \times \dfrac{8^{n+1} - 1}{7} = 224\,694$; $(V_0 = 6)$

$8^{n+1} = 8^6$

$8^{n+1} = 1$ Donc $n = 5$.

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{Y_{n+1}}{Y_{n+1}} = \frac{V_{n+1}}{X_{n+1}} = \frac{8 V_n}{9 X_n} = \frac{8}{9} Y_n$$

$\frac{8}{9}$ est indépendant de n donc la suite Y est géométrique de raison $q'' = \frac{8}{9}$

b) $Y_0 \cdot Y_1 \cdot Y_2 \cdot Y_3 \cdot Y_4 = 1048576$

$$\left(Y_0 = \frac{V_0}{X_0} = \frac{6}{6} = 1\right)$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = Y_0 \cdot (q'')^n = (q'')^n$; $\left(Y_0 = \frac{V_0}{X_0} = 1\right)$

Donc $(q'')^{10} = 1048576$.

$q''^{10} = 4^{10}$

$\left(\frac{q''}{4}\right)^{10} = 1$ Donc $q'' = 4$ ou $q'' = -4$

$\frac{8}{q} = 4$ ou $\frac{8}{q} = -4$

Or $q < 0$ Donc $q = -2$

Résultat $Y_n = (-2)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.