LPS : 2sc	Série d'exercices	Mr Hadjkacem

Exercice 1 :

Soit u et v les suites définies sur IN par $u_n = n^2 + 1$ et $v_n = n^2 + 9$

1) a) Déterminer le quatrième terme de la suite u et le dixième terme de la suite v

b) Le réel 362 est-il un terme de la suite u ? Si oui indiquer son indice et son rang

c) Le réel 362 est-il un terme de la suite v ? Si oui indiquer son indice et son rang

2) Déterminer trois termes consécutifs de la suite u ayant une somme égale à 197

3) Déterminer deux termes consécutifs de la suite v ayant un produit égal à 130

4) a) Décomposer en produit de facteur premier l'entier 3 6

b) Déterminer deux entiers p et q tels que $0 < p < q$ et $u_p \times v_q = 3\ \ 6$

5) a) Montrer que si un entier naturel non nul d divise u_n et v_n alors d est un diviseur de 8

b) Montrer que si n est pair alors les entiers u_n et v_n sont premiers entre eux

c) Montrer que si n est impair alors PGCD $(u_n\ ;\ v_n) = 2$

Exercice 2 :

Soit a , b et c trois termes consécutifs d'une suite arithmétique tels que $\begin{cases} a + b + c = 3 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 75 \end{cases}$

Déterminer les triplets $(a; b; c)$ *possibles*

Exercice 3 :

Soit u et v les suites définies sur IN par $u_n = \frac{1}{2}n + 1$ et $v_n = 4n + 2$

1) Montrer que quelque soit l'entier naturel n, $u_{n+3} + u_n = u_{n+2} + u_{n+1}$

2) Déterminer le nombre de termes de la suite v situés dans l'intervalle $]105; 408[$

Lycée Ribat Sfax
A.S : 2020/2021

Série d'exercices
(Mathématiques)

Mr Hadj Kacem

Exercice 1 :

1) a) • La suite u est définie sur $\mathbb{N}$ donc son quatrième terme est $u_3 = 10$

• La suite v est définie sur $\mathbb{N}$ donc son dixième terme est $v_9 = 90$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 362$ équivaut $n^2 + 1 = 362$

équivaut $n = 19$

$19 \in \mathbb{N}$ donc 362 est un terme de la suite u.

Son indice est 19 ($362 = u_{19}$) et son rang est 20

c) Soit $n \in \mathbb{N}$: $v_n = 362$ équivaut $n^2 + 9 = 362$

équivaut $n^2 = 353$

Il n'existe pas un entier naturel n tel que $n^2 = 353$

Donc 362 n'est pas un terme de la suite v.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$:

$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} = 197$

équivaut $n^2 + 1 + (n+1)^2 + 1 + (n+2)^2 + 1 = 197$

équivaut $3n^2 + 6n - 189 = 0$

équivaut $n^2 + 2n - 63 = 0$

$\Delta = 256 > 0$ donc $n = -9$ ou $n = 7$ or $n \in \mathbb{N}$ donc $n = 7$

Donc les termes $u_7 = 50$, $u_8 = 65$ et $u_9 = 82$ sont trois termes consécutifs de la suite u ayant une somme 197

3) 1ère méthode :

Soit $n \in \mathbb{N}$: $v_n \cdot v_{n+1} = 130$

$(n^2 + 9)\left[(n+1)^2 + 9\right] = 130$

Puisque $n^2 + 9$ et $(n+1)^2 + 9$ sont des entiers dont le produit est l'entier 130 donc ils sont des diviseurs de 130 supérieurs ou égaux à 9 tel que $v_n < v_{n+1}$

Comme $130 = 2 \times 5 \times 13$

Donc $\begin{cases} n^2+9=10 \\ (n+1)^2+9=13 \end{cases}$ d'où $n=1$.

Donc les termes consécutifs de la suite v ayant un produit 130 sont $v_1 = 10$ et $v_2 = 13$.

Deuxième méthode :

Soit $n \in \mathbb{N}$: $v_n \cdot v_{n+1} = 130$

équivaut : $(n^2+9)[(n+1)^2+9] = 130$

équivaut : $n^2(n+1)^2 + 9n^2 + 9(n+1)^2 + 81 = 130$

équivaut : $[n(n+1)]^2 + 18n^2 + 18n + 9 + 81 = 130$

équivaut : $[n(n+1)]^2 + 18[n(n+1)] - 40 = 0$

équivaut : $N^2 + 18N - 40 = 0$ tel que $N = n(n+1)$

$\Delta = 484 > 0$ donc $N = -20$ ou $N = 2$

or $N \in \mathbb{N}$ donc $N = 2$ d'où $n^2 + n - 2 = 0$

Donc $n = 1$ ou $n = -2$ or $n \in \mathbb{N}$ donc $n = 1$

4) a) $36 = 2^2 \times 3^2$

b) $u_p \cdot v_q = 36$

u_p et v_q sont deux entiers naturels dont le produit est l'entier 36 donc ils sont des diviseurs de 36 tels que :

$u_p \geq 2$; $v_q \geq 13$ et $u_p < v_q$; $(0<p<q)$

donc $u_p = 2$ et $v_q = 18$

$p^2+1=2$ et $q^2+9=18$

$p=1$ et $q=3$ $(p \in \mathbb{N}^*$; $q \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$

5) a) $\left.\begin{array}{l} d \text{ divise } u_n \\ d \text{ divise } v_n \end{array}\right\}$ Alors d divise $(v_n - u_n)$

Donc d divise 8

b) Si n est pair alors u_n est impair

Donc u_n n'est pas divisible par 2

Donc tout diviseur d commun de u_n et v_n est tel que $d \notin \{2;4;8\}$ et $d \in D_8$ Donc $d = 1$ par suite u_n et v_n sont premiers entre eux.

c) Si n est impair alors $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$ donc $u_n = 4(k^2+k)+2$ et $v_n = 2(2k^2+2k+5)$ d'où u_n, v_n sont divisibles par 2 et u_n non divisible par 4 Donc si $PGCD(u_n, v_n) = d$ Alors $d \in D_8$, $d \notin \{4,8\}$

Et puisque 2 divise u_n et v_n alors $PGCD(u_n, v_n) = 2$

Exercice 2 :

1° Méthode :

a, b et c trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r

Donc $b = a + r$ et $c = b + r = a + 2r$.

$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 75 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} a + (a+r) + (a+2r) = 3 \\ a^2 + (a+r)^2 + (a+2r)^2 = 75 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} 3a + 3r = 3 \\ 3a^2 + 6ar + 5r^2 = 75. \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} a = 1 - r \\ 3(1-r)^2 + 6(1-r)r + 5r^2 = 75 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} a = 1 - r \\ 2r^2 = 72 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} a = 1 - r \\ r^2 = 36 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} a = -5 \\ r = 6 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = 7 \\ r = -6 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} a = -5 \\ b = 1 \\ c = 7 \\ r = 6 \end{cases}$ (Vérifié) ou $\begin{cases} a = 7 \\ b = 1 \\ c = -5 \\ r = -6 \end{cases}$ (Vérifié)

Les triplets $(a; b; c)$ sont $(-5; 1; 7)$ et $(7; 1; -5)$

2° Méthode : (sans introduire la raison)

$a\,;\,b\,;\,c$ en progression arithmétique

Donc $b - a = c - b$

d'où $a + c = 2b$.

$$\begin{cases} a+b+c = 3 \\ a^2+b^2+c^2 = 75 \end{cases} \quad \text{c-à-d} \quad \begin{cases} 3b = 3 \\ a^2+b^2+c^2 = 75 \end{cases} \quad \text{c-à-d} \quad \begin{cases} b = 1 \\ a^2+c^2 = 74 \end{cases}$$

Donc
$$\begin{cases} a + c = 2 \\ a^2+c^2 = 74 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} a+c = 2 \\ (a+c)^2 - 2ac = 74 \end{cases}$$

Alors
$$\begin{cases} a+c = 2 \\ ac = -35 \end{cases}$$

Donc a et c sont solutions de l'équation

$X^2 - 2X - 35 = 0$

$\Delta = 144 > 0$

$X_1 = -5$ et $X_2 = 7$

Réciproquement
$$\begin{cases} a = -5 \\ c = 7 \\ b = 1 \end{cases} \text{(vérifié)} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a = 7 \\ c = -5 \\ b = 1 \end{cases} \text{(vérifié)}$$

Conclusion : Les triplets $(a;b;c)$ sont $(-5;1;7)$ et $(7;1;-5)$

Exercice 3 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+3} + u_n = \frac{1}{2}(n+3) + 1 + \frac{1}{2}n + 1 = n + \frac{7}{2}$$

et $$u_{n+2} + u_{n+1} = \frac{1}{2}(n+2) + 1 + \frac{1}{2}(n+1) + 1 = n + \frac{7}{2}$$

Donc $$u_{n+3} + u_n = u_{n+2} + u_{n+1}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$;

$v_n \in]105 ; 408[$ ssi $105 < 4n+2 < 408$

ssi $\frac{103}{4} < n < \frac{406}{4}$

puisque $n \in \mathbb{N}$ donc $26 \leq n \leq 101$

Donc le nombre de terme de la suite v appartenant à $]105 ; 408[$ est $N = 76$ $(101 - 26 + 1)$.