Lycée Pilote F-H Sfax	**Devoir de Synthèse N°1**	Durée 2 heures
2ème année sciences	15/12/2024	Année scolaire : 2023 - 2024

Exercice 1 :(6 pts)

On donne $A(x) = (x^2 - 6x + 2)^2 + 9x^2 - 54x + 36$.

1°)a. Soit $t \in \mathbb{R}$. Factoriser le trinôme $t^2 + 9t + 18$.

b. Déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = (x^2 - 6x + 5)(x^2 - 6x + 8)$.

c. Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $A(x) = 0$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\dfrac{\sqrt{x-2}}{A(x)} \leq 0$.

3°) Soit $B(x) = \dfrac{A(x)}{x^4 - 29x^2 + 100}$.

a. Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels $B(x)$ a un sens.

b. Vérifier que pour tout $x \in D$, $B(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 7x + 10}$.

c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $B(x) \leq \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$.

Exercice 2 :(4 pts)

Soit a, b , et α trois réels tels que $a \neq 0$.

On donne $A(x) = ax^2 + bx + b$ et ci-dessous son tableau de signe :

x	$-\infty$		-3		α		$+\infty$
$A(x)$		+	0	−	0	+	

1°) a. Comparer α et -1.

b. Calculer α.

c. Déduire le signe de b.

2°) On donne $B(x) = bx^2 + 2ax + \dfrac{a}{4}$.

Montrer que $B(x)$ n'a pas de racines.

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation: $x^2 . \sqrt{\dfrac{B(x)}{A(x)}} > 0$.

4°) On donne $A(0) = 2$.

Déterminer les expressions de $A(x)$ et $B(x)$.

Exercice 3 :(5pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On donne les points $A(-3, -1)$, $B(1, -3)$ et Δ la médiatrice de $[AB]$.

1°) a. Calculer les coordonnées du point C défini par : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = 6\vec{i} + 12\vec{j}$.

b. Montrer que $C \in \Delta$.

2°) Soit I le milieu de $[AB]$ et $\mathscr{C}$ le cercle de centre I et passant par C.

$[BA)$ coupe $\mathscr{C}$ en E.

a. Montrer que E est le barycentre de $(A, 3)$ et $(I, -2)$.

b. Déduire les coorddonnées de E.

3°) Soit K le point diamétralement opposé à E sur $\mathscr{C}$.

Montrer que O est l'orthocentre du triangle ACK.

4°) Δ recoupe $\mathscr{C}$ en F.

Les droites (OA) et (EF) se coupent en G.

Montrer que G est le barycentre de E et F affectés de coefficients que l'on précisera.

Exercice 4 :(5pts)

ABCD est un trapèze rectangle en A et D.

On désigne par : I le barycentre de $(A, 1)$ et $(C, 3)$

L le barycentre de $(C, 1)$ et $(D, 2)$

et J le milieu de $[BD]$.

1°) Construire les points I et L.

2°) Soit E le point tel que ABEC est un parallélogramme et K le point défini par:

$5\overrightarrow{AK} - 2\overrightarrow{AE} = \vec{0}$.

a. Montrer que K est le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$ et $(C, 2)$

b. Soit P le barycentre de $(K, 5)$ et $(L, 3)$.

Montrer que $\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} + 2\overrightarrow{PD} = \vec{0}$.

c. Déduire que les points P, I et J sont alignés.

3°) Soit $E_1 = \{M \in P \text{ tels que } (\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD}) \perp (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD})\}$.

Montrer que $E_1 = (CD)$.

4°) Soit M un point du plan et $\vec{u} = 4\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$.

a. Montrer que $\|\vec{u}\| = 2AE$.

b. Déterminer l'ensemble:

$E_2 = \{M \in P \text{ tels que } \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD}\| = \|4\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\|\}$.

Lycée Pilote F-H-Sfax | Correction devoir synthèse N°1 (Mathématiques) | 3.S.C. Année scolaire 2024/

Exercice 1 : (6 pt)

1) a) Soit $K(t) = t^2 + 9t + 18$

$\Delta = 9 > 0$; $t_1 = -6$ et $t_2 = -3$ (0,75)

Donc $K(t) = (t+6)(t+3)$

b) $A(x) = (x^2 - 6x + 2)^2 + 9(x^2 - 6x + 2) + 18$

$= t^2 + 9t + 18$ (avec $t = x^2 - 6x + 2$)

$= (t+6)(t+3)$ (0,5)

Donc $A(x) = (x^2 - 6x + 5)(x^2 - 6x + 8)$; pour tout $x \in \mathbb{R}$

c) $S_{\mathbb{R}} = \{1 ; 2 ; 4 ; 5\}$ (1)

2) On considère le tableau de signe de $A(x)$

x	$-\infty$		1		2		4		5		$+\infty$
x^2-6x+5		+	0	−		−		−	0	+	
x^2-6x+8		+		+	0	−	0	+		+	
$A(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

$\dfrac{\sqrt{x-2}}{A(x)} \leq 0$ équivaut $x - 2 \geq 0$ et $A(x) < 0$; ($\sqrt{x-2} \in \mathbb{R}_+$ pour $x \geq 2$)

équivaut $x \geq 2$ et $A(x) < 0$

équivaut $x \in [2 ; +\infty[$ et $x \in]1 ; 2[\cup]4 ; 5[$

Donc $S_{\mathbb{R}} =]4 ; 5[$ (1,25)

3) a) $B(x)$ a un sens ssi $x^4 - 29x^2 + 100 \neq 0$

Soit l'équation $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$

$y^2 - 29y + 100 = 0$; ($y = x^2$)

$\Delta = 441 > 0$, $y = 4$ ou $y = 25$

$x = 2$ ou $x = -2$ ou $x = 5$ ou $x = -5$

Donc $D = \mathbb{R} \setminus \{-5 ; -2 ; 2 ; 5\}$ (0,75)

b) Pour $\forall x \in D$: $B(x) = \dfrac{A(x)}{x^4 - 29x^2 + 100}$

$= \dfrac{(x^2 - 6x + 5)(x^2 - 6x + 8)}{(y-25)(y-4)}$; $(y = x^2)$

$= \dfrac{(x-1)(x-5)\cdot(x-2)(x-4)}{(x-5)(x+5)(x-2)(x+2)} = \dfrac{(x-1)(x-4)}{(x+5)(x+2)}$

Donc pour $\forall x \in D$ $B(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 7x + 10}$ 0,75

c) Condition : $x \in D$ et $x \neq -2$ Donc $x \in D$.

Soit $x \in D$: $B(x) \leq \dfrac{x^2 - 1}{x+2}$

équivaut $\dfrac{(x-1)(x-4)}{(x+5)(x+2)} \leq \dfrac{x^2 - 1}{x+2}$

équivaut $\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)\left[\dfrac{x-4}{x+5} - (x+1)\right] \leq 0$

équivaut $\dfrac{(x-1)(-x^2 - 5x - 9)}{(x+2)(x+5)} \leq 0$

Le discriminant du trinôme est $\Delta = -11 < 0$

Donc $-x^2 - 5x - 9 < 0$; pour $\forall x \in D$. $(a = -1 < 0)$

$x-1$ s'annule en 1 ; $x+2$ s'annule en -2 et $x+5$ s'annule en -5

x	$-\infty$	-5		-2		1		$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$		$+$	0	$+$	
$-x^2-5x-9$	$-$		$-$		$-$		$-$	
$x+2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+5$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Resultat	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de $B(x) \leq \dfrac{x^2-1}{x+2}$

est $S_{\mathbb{R}} = D \cap \left(]-5;-2[\cup [1, +\infty[\right)$ 1,25

Donc $S_{\mathbb{R}} = \left(]-5;-2[\cup [1;+\infty[\right) \setminus \{2;5\}$

Exercice 2 : (4pts)

1) a) $A(x)$ est un trinôme du second degré qui s'annule en -3 et α Tel que $A(x)<0$ pour $\forall x\in]-3;\alpha[$ Donc $a>0$

$A(-1) = a > 0$ Donc $-1 \in]\alpha;+\infty[$, $(-1 > -3)$

D'où $\alpha < -1$ (0,5)

b) $-3+\alpha = \frac{-b}{a}$ et $-3\alpha = \frac{b}{a}$

Donc $3\alpha = -3+\alpha$ D'où $\alpha = -\frac{3}{2}$ (0,75)

c) $-3\alpha = \frac{b}{a}$ et $\alpha = -\frac{3}{2}$

Donc $\frac{b}{a} = \frac{9}{2}$

$b = \frac{9}{2}a > 0$ or $a>0$

D'où $b>0$ (0,5)

2) Soit Δ le discriminant de $B(x)$

$\Delta = (2a)^2 - 4\cdot b\cdot(\frac{a}{4})$

$= 4a^2 - ab = 4a^2 - \frac{9}{2}a^2 = -\frac{1}{2}a^2 < 0$

Donc $B(x)$ n'a pas de racines (0,75)

3) $B(x)$ n'a pas de racine et $b>0$ Donc $B(x)>0$ pour $\forall x\in\mathbb{R}$

$x^2\sqrt{\frac{B(x)}{A(x)}} > 0$ équivaut à : $A(x)>0$ et $x^2\neq 0$

$A(x)>0$ et $x\neq 0$ (0,75)

Donc $S_{\mathbb{R}} = (]-\infty;-3[\cup]-\frac{3}{2};+\infty[) \setminus \{0\}$

4) $A(0)=2$ Donc $b=2$

Comme $\frac{b}{a} = \frac{9}{2}$ Donc $a = \frac{2b}{9} = \frac{4}{9}$ (0,75)

Ensuite $A(x) = \frac{4}{9}x^2 + 2x + 2$ et $B(x) = 2x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{1}{9}$

Pour $\forall x\in\mathbb{R}$

Exercice 3 : (5pts)

1) a) $\vec{AC} + \vec{BC} = 6\vec{i} + 12\vec{j}$ équivaut à : $x_C - x_A + x_C - x_B = 6$ et $y_C - y_A + y_C - y_B = 12$

équivaut à : $x_C = 2$ et $y_C = 4$ D'où $C(2,4)$ (0,75)

b) $\vec{CA}\binom{-5}{-5}$ et $\vec{CB}\binom{-1}{-7}$ Donc $CA = CB = \sqrt{50}$ D'où $C\in\Delta$ (0,5)

2) a) I milieu de $[AB]$ donc $I(-1\,;-2)$

$\mathcal{C}$ de centre I passant par C donc $r_{\mathcal{C}} = IC = 3\sqrt{5}$; $\left(\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}\right)$

$E \in \mathcal{C}$ donc $IE = 3\sqrt{5}$

$IA = \sqrt{5}$ donc $IE = 3\,IA$

$E \in [IA)$ donc $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{IA}$ sont col et de même sens d'où $\overrightarrow{IE} = 3\,\overrightarrow{IA}$

$\overrightarrow{IE} = \dfrac{3}{3+(-2)}\,\overrightarrow{IA}$ Ainsi E bary $(A\,;3)\,;(I\,;-2)$ (1)

b) $E\,(-7\,;1)$ (0,5)

3) $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}-9\\-3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CE} = 3\,\overrightarrow{OA}$

d'où $(CE) \parallel (OA)$

$[EK]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$ et $C \in \mathcal{C}$ donc $(CE) \perp (CK)$

et puisque $(CE) \parallel (OA)$ alors $(OA) \perp (CK)$.

d'autre part $OA = OB = \sqrt{10}$ donc $O \in \Delta$, $I \in \Delta$

donc $(OC) \perp (AB)$ et puisque $K \in (IE)$ et $A \in (IE)$

alors $(OC) \perp (AK)$

Ainsi $(AO) \perp (CK)$, $(CO) \perp (AK)$ et $(CO) \cap (AO) = \{O\}$ (1,25)

On déduit que O est l'orthocentre de ACK

4) E bary $(A,3)\,,(I,-2)$ donc $\overrightarrow{EA} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{EI}$

I milieu de $[EK]$ donc $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{EK}$

On déduit que $\overrightarrow{EA} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{EK}$

d'autre part $(OA) \parallel (EC)$ et $G \in (OA)$ donc $(AG) \parallel (EC)$

Comme I est le milieu de $[EK]$ et $[FC]$ alors $(EC) \parallel (FK)$

Par conséquent $(AG) \parallel (FK)$

Dans le triangle EFK :

$A \in (EK)$; $G \in (EF)$ $\Big\}$ d'après la forme vectorielle

$(AG) \parallel (FK)$ $\Big\}$ du théorème de Thalès

$\overrightarrow{EA} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{EK}$ $\Big\}$ on déduit que $\overrightarrow{EG} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{EF}$

Par suite G est le bary $(E,2)$ et $(F,1)$

(1)

Exercice 4 : (5 pts)

1

1) $\vec{AI} = \frac{3}{4}\vec{AC}$ et $\vec{CL} = \frac{2}{3}\vec{CD}$

2) a) $5\vec{AK} - 2\vec{AE} = \vec{0}$ équivaut à : $\vec{AK} = \frac{2}{5}\vec{AE}$

(0,25)

équivaut à : $\vec{AK} = \frac{2}{2+2+1}\vec{AB} + \frac{2}{2+2+1}\vec{AC}$; (ABEC parallélogramme)

Donc K bary (A ; 1) ; (B ; 2) et (C ; 2)

b) P un point du plan et K bary (A,1) ; (B,2) ; (C,2) Donc

$\vec{PA} + 2\vec{PB} + 2\vec{PC} = 5\vec{PK}$

P un point du plan et L bary (C,1) ; (D,2) Donc

$\vec{PC} + 2\vec{PD} = 3\vec{PL}$

P est le bary (K ; 5) ; (L ; 3) Donc $5\vec{PK} + 3\vec{PL} = \vec{0}$

D'où $(\vec{PA} + 2\vec{PB} + 2\vec{PC}) + (\vec{PC} + 2\vec{PD}) = \vec{0}$

Par suite $\vec{PA} + 2\vec{PB} + 3\vec{PC} + 2\vec{PD} = \vec{0}$ (0,25)

c) $\vec{PA} + 2\vec{PB} + 3\vec{PC} + 2\vec{PD} = \vec{0}$

$(\vec{PA} + 3\vec{PC}) + 2\vec{PB} + 2\vec{PD} = \vec{0}$

$(1+3)\vec{PI} + (2+2)\vec{PJ} = \vec{0}$; (J mil de [BD] ; I bary (A,1) ; (C ; 3))

$4\vec{PI} + 4\vec{PJ} = \vec{0}$

Donc P est le milieu de [IJ] (0,5)

D'où l'alignement des points P, I, J

3) $M \in E$ équivaut à : $(\vec{MC} + 2\vec{MD}) \perp (\vec{MA} - \vec{MD})$

équivaut à : $(3\vec{ML}) \perp \vec{DA}$

équivaut à : $\vec{ML} \perp \vec{DA}$ ($3\vec{MC}$ et $\vec{ML}$ ~~colinéaires~~)

Donc E_1 est la droite passant par L et perpendiculaire à (AD)

$L \in (CD)$ car L bary (C,1) ; (D ; 2) et $(CD) \perp (AD)$; ABCD trapèze rectangle en A et D d'où $E_1 = (CD)$ (0,25)

4) a) $\vec{u} = 4\vec{AM} + 2\vec{MB} + 2\vec{MC} = (\vec{MA} + 2\vec{MB} + 2\vec{MC}) - 5\vec{MA}$

$= 5\vec{MK} - 5\vec{MA}$; ($M \in P$ et K bary (A,1) ; (B,2) ; (C,2))

$= 5\vec{AK} = 2\vec{AE}$ Donc $\|\vec{u}\| = 2AE$ (0,5)

b) $M \in E_2$ équivaut à : $\|\vec{MA} + 2\vec{MB} + 2\vec{MC} + \vec{MC} + 2\vec{MD}\| = \|\vec{u}\|$

équivaut à : $\|5\vec{MK} + 3\vec{MC}\| = 2AE$ (K bary (A,1) ; (B,2) ; (C,2) ; L bary (C,1) ; (D ; 2))

(0,25) équivaut à : $\|8\vec{MP}\| = 2AE$; (P bary (K,5) ; (L,3))

équivaut à : $PM = \frac{1}{4}AE$ Donc E_2 est le cercle de centre P de rayon $\frac{1}{4}AE$