Lycée pilote Sfax 12/12/2023	Devoir de synthèse N°1 Mathématiques	$2^{ème}$ Sc 1, 2, 3, 4, 5 et 6 Durée : 2h

Exercice 1 (6,5 points)

On donne $A(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $A(x) = 0$.

2) a) Factoriser $A(x)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $A(x) \geq 0$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $|A(x)| + A(x) = 0$.

3) Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{A(x)}{x^3 - x^2 - 2x}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

b) Vérifier que pour tout $x \in D_f$, $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x}$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $f(x) \geq \dfrac{2x^2}{2x+3}$.

Exercice 2 (3,5 points)

ABC est un triangle rectangle en A telque $AB = AC = 10$. Soit D un point du segment $[AB]$ et E un point du segment $[AC]$ telque $BD = 2AE$. On pose $AE = x$ et on désigne par $A(x)$ l'aire du triangle ADE.

1) Exprimer $A(x)$ en fonction de x.

2) Existe-t-il une valeur de x pour laquelle $A(x) = \dfrac{25}{4}$?

3) Déterminer l'ensemble S des réels x tels que $A(x) \leq \dfrac{9}{4}$.

Exercice 3 (10 points)

Soit ABC un triangle rectangle en B, On désigne par I et J les milieux respectifs de $[AC]$ et $[BC]$.

1) a) Construire le point D image de C par la translation de vecteur $2\overrightarrow{BA}$.

b) Construire le point E barycentre des points pondérés $(A, 4)$ et $(B, -1)$.

2) Soit G le barycentre des points pondérés $(A, 4)$, $(B, -1)$ et $(C, 3)$.

a) Montrer que G est le milieu de $[EC]$.

b) Montrer que les points G, I et J sont alignés.

3) Déterminer l'ensemble $\mathscr{C} = \left\{M \in P \text{ tel que } \left\|4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right\| = 6\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right\|\right\}$

4) Soit l'application $f : P \to P$

$M \mapsto M'$ tel que M' est le barycentre des points pondérés $(M, 1)$, $(A, -1)$ et $(D, 1)$.

a) Montrer que f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

b) Construire les points C' et G' images respectives de C et G par f.

c) Déterminer les images des droites (AB) et (CG) par f.

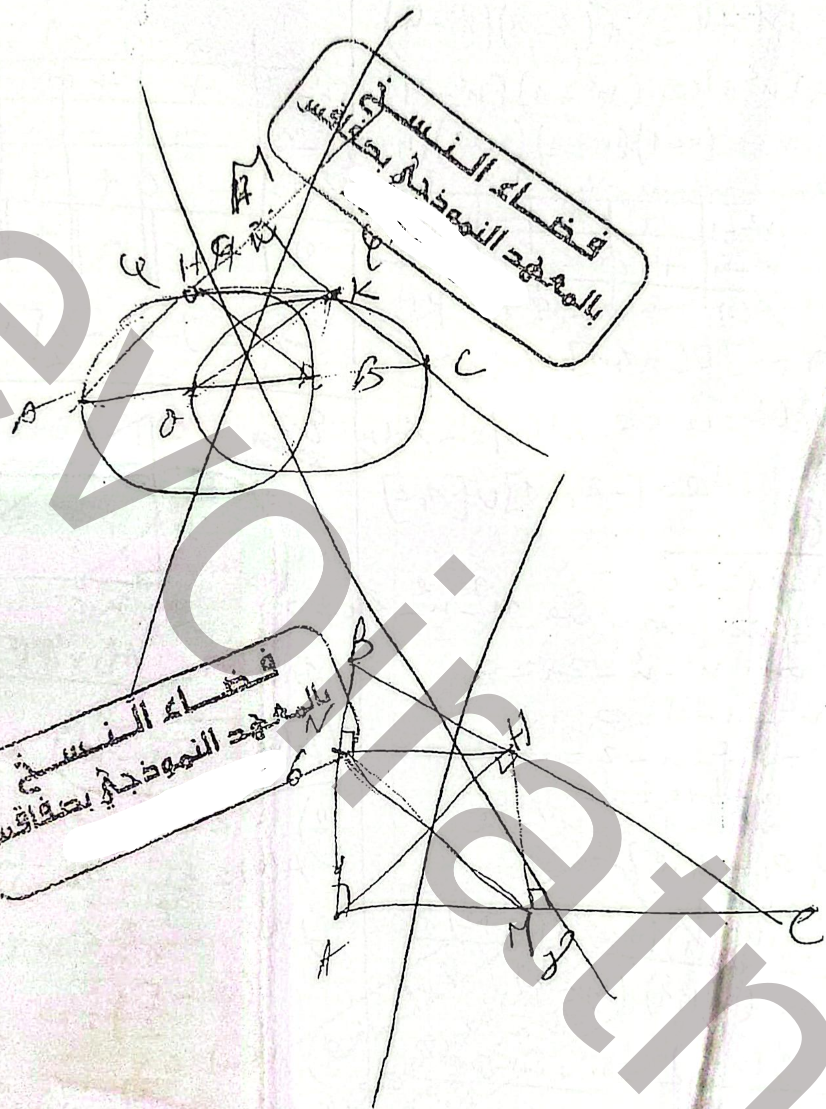
d) La droite $(C'G')$ coupe (CD) en K. Montrer que $f(E) = K$.

e) Soit O le milieu de $[CD]$. Montrer que G' est le barycentre des points pondérés $(D, 4)$, $(O, -1)$ et $(C', 3)$

5) On suppose que dans le triangle rectangle ABC en B, les points A et B sont fixes et C est variable.

a) Quel est l'ensemble des points C.

b) Déterminer alors l'ensemble des points O lorsque C varie.


A
O
B
C
K
A
B
C
D

Devoir 2023

Ex1 $A(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

1) $A(x) = 0$ équivaut à $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

on pose $t = x^2$ d'où $t^2 - 5t + 4 = 0$

$a + b + c = 0$ d'où $t' = 1$; $t'' = 4$

Si $t = 1$ alors $x^2 = 1$ d'où $x = 1$ ou $x = -1$

Si $t = 4$ alors $x^2 = 4$ d'où $x = 2$ ou $x = -2$

$S_{\mathbb{R}} = \{1, -1, 2, -2\}$

2) a) $t^2 - 5t + 4 = 1(t-1)(t-4)$

d'où $x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2-1)(x^2-4)$

$= (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

b) $A(x) \geq 0$

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
x^2-1		+		+	0	−	0	+		+	
x^2-4		+	0	−		−		−	0	+	
$A(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, +\infty[$

c) $|A(x)| + A(x) = 0$ équivaut à $|A(x)| = -A(x)$

équivaut à $A(x) \leq 0$; $S_{\mathbb{R}} = [-2, -1] \cup [1, 2]$

3) $f(x) = \dfrac{A(x)}{x^3 - x^2 - 2x}$

a) $f(x)$ est définie lorsque $x^3 - x^2 - 2x \neq 0$

Soit l'équation : $x^3 - x^2 - 2x = 0$

$x(x^2 - x - 2) = 0$

$x = 0$ ou $x^2 - x - 2 = 0$

$a - b + c = 0$

$x' = -1$ $\quad x'' = 2$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 2\}$

b) Pour tout $x \in D_f$

$f(x) = \dfrac{(x-1)\cancel{(x+1)}\cancel{(x-2)}(x+2)}{x\cancel{(x+1)}\cancel{(x-2)}}$

$= \dfrac{(x-1)(x+2)}{x} = \dfrac{x^2 + 2x - x - 2}{x}$

$f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x}$

c) $x \in D_f$, $\quad f(x) \geq \dfrac{2x^2}{2x+3}$

Condition : $\boxed{x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 2, -\frac{3}{2}\}}$

$2x + 3 \neq 0$

$x \neq -\frac{3}{2}$ et $x \in D_f$

$f(x) - \dfrac{2x^2}{2x+3} \geq 0$ équivaut à $\dfrac{x^2 + x - 2}{x} - \dfrac{2x^2}{2x+3} \geq 0$

$\dfrac{(x^2 + x - 2)(2x+3) - 2x^3}{x(2x+3)} \geq 0$

$\dfrac{\cancel{2x^3} + 3x^2 + 2x^2 + 3x - 4x - 6 - \cancel{2x^3}}{x(2x+3)} \geq 0$

$\dfrac{5x^2 - x - 6}{x(2x+3)} \geq 0$; Soit l'équation $5x^2 - x - 6 = 0$

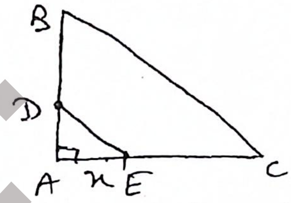
$a - b + c = 0$

$x' = -1 \quad x'' = \frac{6}{5}$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		0		$\frac{6}{5}$		$+\infty$
$5x^2-x-6$		+		+	0	−		−	0	+	
x		−		−		−	0	+		+	
$2x+3$		−	0	+		+		+		+	
Q		+	‖	−	‖	+	‖	−	0	+	

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup]-1, 0[\cup [\frac{6}{5}, +\infty[\setminus \{2\}$

Ex2



$AB = 10$

$AE = x$

$BD = 2x$

1) $A(x) = \dfrac{AD \times AE}{2} = \dfrac{(10 - 2x)x}{2}$

$\boxed{A(x) = 5x - x^2}$

2) $0 < 2x < 10$ d'où $x \in]0, 5[$

$A(x) = \frac{25}{4}$ équivaut à $5x - x^2 = \frac{25}{4}$

d'où $x^2 - 5x + \frac{25}{4} = 0$

$(x - \frac{5}{2})^2 = 0$ équivaut à $x = \frac{5}{2}$ acceptable

3) $A(x) \leq \frac{9}{4}$ équivaut à $5x - x^2 - \frac{9}{4} \leq 0$

$x^2 - 5x + \frac{9}{4} \geq 0$

$\Delta = 25 - 9 = 16$

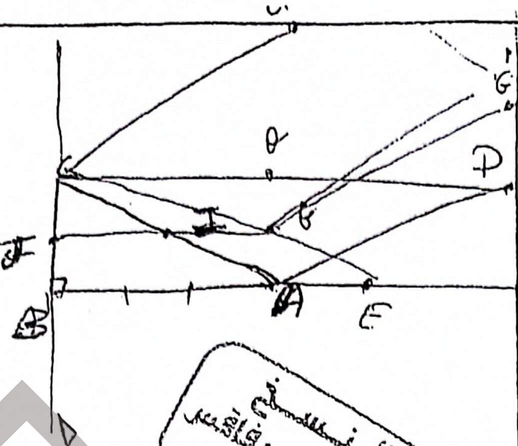
$x' = \dfrac{5 - 4}{2} = \dfrac{1}{2}$ $\quad x'' = \dfrac{5+4}{2} = \dfrac{9}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{9}{2}$		$+\infty$
$x^2-5x+\frac{9}{4}$		+	0	−	0	+	

$S_{\mathbb{R}} = \left(]-\infty, \frac{1}{2}] \cup [\frac{9}{2}, +\infty[\right) \cap]0, 5[$

$S_{\mathbb{R}} =]0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{9}{2}, 5[.$

Ex3



1) a) $t_{2\vec{BA}}(C) = D$ équi

b) E barye $(A,4)$ et $(B,-1)$ équi $\vec{AE} = \dfrac{1}{3}\vec{AB}$

2) G barye de $(A,4)$, $(B,-1)$ et $(C,3)$

a) $4\vec{GA} - \vec{GB} + 3\vec{GC} = \vec{0}$

équi $3\vec{GE} + 3\vec{GC} = \vec{0}$ car E barye $(A,4)$ et $(B,-1)$

d'où G est le milieu de $[EC]$

b) $4\vec{GA} - \vec{GB} - \vec{GC} + 4\vec{GC} = \vec{0}$

$4(\vec{GA} + \vec{GC}) - (\vec{GB} + \vec{GC}) = \vec{0}$

$4 \times \cancel{2}\vec{GI} - \cancel{2}\vec{GJ} = \vec{0}$

G barye $(I,4)$ et $(J,-1)$ donc

les pts G, I et J sont alignés.

3) $4\vec{MA} - \vec{MB} + 3\vec{MC} = 6\vec{MG}$ car G est le barye des pts $(A,4)$, $(B,-1)$ et $(C,3)$

$\vec{MA} - \vec{MB} = \vec{BA}$

$M \in \mathcal{C}$ équi $\|6\vec{MG}\| = 6\|\vec{BA}\|$

; $\cancel{6}MG = \cancel{6}BA$

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre G et de rayon BA

4) $f(M) = M'$ équi $\vec{M'M} - \vec{M'A} + \vec{M'D} = \vec{0}$

a) $f(M) = M'$ équi $\vec{M'M} + \vec{AM'} + \vec{M'D} = \vec{0}$

$\vec{M'M} + \vec{AD} = \vec{0}$

d'où $\vec{M'M} = -\vec{AD}$ équi $\vec{MM'} = \vec{AD}$

donc $t_{\vec{AD}}(M) = M'$ par suite $f = t_{\vec{AD}}$

b) $f(C) = C'$ équi $\vec{AD} = \vec{CC'}$

$f(G) = G'$ équi $\vec{AD} = \vec{GG'}$

c) $\vec{CD} = 2\vec{BA}$ donc $\vec{CD}$ et $\vec{BA}$ colinéaires

donc $(CD) \parallel (AB)$ et $f(A) = D$

d'où $f((AB)) = (CD)$

$f((CG)) = (C'G')$ car $f(C) = C'$ et $f(G) = G'$

d) $\{E\} = (AE) \cap (CG)$

$\{f(E)\} = f((AE)) \cap f((CG))$

$= (CD) \cap (C'G') = \{K\}$

d'où $f(E) = K$

e) O milieu de $[CD]$

$\vec{CD} = 2\vec{BA}$ d'où $2\vec{OD} = 2\vec{BA}$

donc $\vec{BA} = \vec{OD}$ d'où $\vec{AD} = \vec{BO}$

par suite $f(B) = O$; $f(A) = D$

$f(C) = C'$, $f(G) = G'$.

G barye $(A,4)$, $(B,-1)$ et $(C,3)$

la translation conserve le barycentre

d'où G' est le barycentre des points $(D,4)$; $(O,-1)$ et $(C',3)$

5) ABC est un triangle rectangle en B, A et B sont fixes

donc $(AB) \perp (BC)$ d'où

C varie sur la droite Δ perpendiculaire à (AB) passant par B privé de B

$\vec{CO} = \vec{BA}$

d'où $t_{\vec{BA}}(C) = O$

donc l'ensemble des pts O est $t_{\vec{BA}}(\Delta) = \Delta'$ privé de $t_{\vec{BA}}(B) = A$ où Δ' est la parallèle à Δ passant par A.