Lycée pilote-Sfax	Devoir de synthèse N°1	Durée : 2h
Classe : 2sc	Mathématiques	6 Décembre 2021

2

Exercice 1 : (8points)

Soit le polynôme f défini par $f(x) = 2x^3 - 10x^2 + 16x - 8$

1) Montrer que f est factorisable par $(x-2)$

2) a) Factoriser f(x)

b) Résoudre dans IR l'inéquation $\dfrac{f(x)}{x-2} \geq 0$

3) Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{f(x)}{4x^2 - 7x - 2}$

a) Déterminer l'ensemble de définition D de g.

b) Vérifier que pour tout $x \in D$: $g(x) = \dfrac{2x^2 - 6x + 4}{4x+1}$

c) Résoudre dans IR l'inéquation : $g(x) \leq x - 1$

d) Comparer alors $g(1+\sqrt{3})$ et $\sqrt{3}$

Exercice 2 : (3points)

Soit ABC un triangle équilatéral de coté 3 (l'unité de longueur est le centimètre)

Soit M un point du segment $[AB]$ privé de A et B et N un point du segment $[AC]$ tel que AM = CN

On pose AM = x et on désigne par a(x) l'aire du triangle AMN

Soit H le projeté orthogonal de M sur (AC)

1) Montrer que $MH = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$

2) a) Exprimer a(x) en fonction de x

b) Calculer l'aire S du triangle ABC

c) Déterminer l'ensemble des réels x tel que $a(x) \leq \dfrac{2}{9}S$

Exercice3 : (9points)

Soient ABC un triangle isocèle en A, I le barycentre des points pondérés (A,4) , (B,-1) et J le barycentre des points pondérés (A,4) , (C,-1).

1) a) *Construire les points I et J*

b) Montrer que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles

2) Soit G le barycentre des points pondérés (A,8) , (B,-1) et (C,-1)

Montrer que G est le milieu du segment $[IJ]$

3) Soit Δ l'ensemble des points M du plan tel que $\left\|4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right\|$

a) Vérifier que $A \in \Delta$.

b) Déterminer et construire l'ensemble Δ.

4) Soit l'application $f : P \rightarrow P$

$M \mapsto M'$ tel que $6\,\overrightarrow{M'J} = 8\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$

a) Montrer que f est la translation de vecteur $\overrightarrow{IG}$

b) Construire la droite Δ' image de la droite Δ par f

5) Soit E l'image de B par f, Δ' coupe (GE) en F

a) Déterminer l'image de la droite (AI) par f

b) *Déduire que F est l'image de A par f*

c) Montrer que G est le barycentre des points E et F affectés de cœfficients que l'on précisera

Devoir 2021

Ex1 $f(x) = 2x^3 - 10x^2 + 16x - 8$

1) $(x-2)(2x^2-6x+4) = 2x^3 - 6x^2 + 4x - 4x^2 + 12x - 8$
$= 2x^3 - 10x^2 + 16x - 8 = f(x)$

2) Soit l'équation $2x^2 - 6x + 4 = 0$
$a+b+c=0$ donc $x' = 1$; $x'' = 2$

$f(x) = (x-2) \times 2(x-1)(x-2)$
$= \boxed{2(x-1)(x-2)^2}$

b) $\dfrac{f(x)}{x-1} \geq 0$; condition $x \neq 1$

équi $2(x-2)^2 \geq 0$

$S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

3) $g(x) = \dfrac{f(x)}{4x^2 - 7x - 2}$

a) $g(x)$ a un sens si $4x^2 - 7x - 2 \neq 0$
Soit l'équation, $4x^2 - 7x - 2 = 0$
$\Delta = 49 + 32 = 81 = 9^2$

$x' = \dfrac{7-9}{8} = -\dfrac{1}{4}$, $x'' = \dfrac{7+9}{8} = 2$

$D = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{4}, 2\}$

b) Pour $x \in D$; $g(x) = \dfrac{2(x-1)(x-2)^2}{4(x+\frac{1}{4})(x-2)}$

$g(x) = \dfrac{2(x-1)(x-2)}{(4x+1)} = \dfrac{2(x^2-2x-x+2)}{4x+1}$

$g(x) = \dfrac{2x^2 - 6x + 4}{4x+1}$

c) $x \in D$, $g(x) \leq x - 1$

équi $\dfrac{2x^2-6x+4}{4x+1} - (x-1) \leq 0$

$\dfrac{2x^2 - 6x + 4 - (x-1)(4x+1)}{4x+1} \leq 0$

$\dfrac{2x^2 - 6x + 4 - 4x^2 - x + 4x + 1}{4x+1} \leq 0$

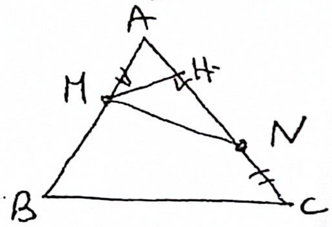
$\dfrac{-2x^2 - 3x + 5}{4x+1} \leq 0$

Soit l'équation : $-2x^2 - 3x + 5 = 0$
$a+b+c=0$, $x' = 1$ $x'' = -\frac{5}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$-\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$-2x^2-3x+5$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$4x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Q		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

$S_{\mathbb{R}} = [-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}[\cup [1, +\infty[\setminus \{2\}$

d) $1+\sqrt{3} \in [1, +\infty[$
donc $1+\sqrt{3}$ est une solution de l'inéquation $g(x) \leq x - 1$.
d'où $g(1+\sqrt{3}) \leq 1 + \sqrt{3} - 1$
par suite $g(1+\sqrt{3}) \leq \sqrt{3}$



$AM = x$
$AB = 3$

1) Dans le triangle AMH rectangle en H
$\sin 60° = \dfrac{MH}{AM} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $MH = \dfrac{\sqrt{3}}{2} x$

2) a) $a(x) = \dfrac{MH \times AN}{2} = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} \left(\dfrac{3-x}{2}\right)$

$a(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(3x - x^2)$

b) $S = 3\dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$

c) $a(x) \leq \dfrac{2}{9} S$

$\cancel{\dfrac{\sqrt{3}}{4}}(3x - x^2) \leq \dfrac{2}{9} \times \cancel{\dfrac{9\sqrt{3}}{4}}$

$3x - x^2 \leq 2$

$-x^2 + 3x - 2 \leq 0$

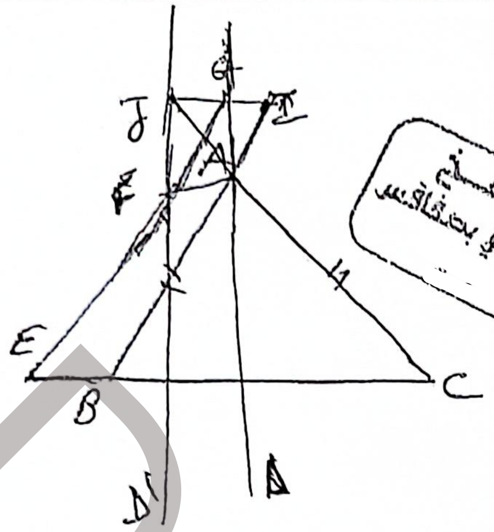
Soit l'équation : $-x^2 + 3x - 2 = 0$
$a+b+c=0$, $x' = 1$ $x'' = 2$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$-x^2+3x-2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S_{\mathbb{R}} = (]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[) \cap]0, 3[$

$S_{\mathbb{R}} =]0, 1] \cup [2, 3[$

Ex 3



1/a) I barycentre $(A,4)$ et $(B,-1)$ d'où $\vec{AI} = -\frac{1}{3}\vec{AB}$

J " $(A,4)$ et $(C,-1)$ d'où $\vec{AJ} = -\frac{1}{3}\vec{AC}$

b) $\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AJ} = \frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}$

$= \frac{1}{3}\vec{CB}$

d'où $\vec{IJ}$ et $\vec{CB}$ sont colinéaires

donc $(IJ) \parallel (BC)$

2) G barycentre $(A,8)$; $(B,-1)$ et $(C,-1)$

équivaut $8\vec{GA} - \vec{GB} - \vec{GC} = \vec{0}$

" $4\vec{GA} - \vec{GB} + 4\vec{GA} - \vec{GC} = \vec{0}$

" $3\vec{GI} + 3\vec{GJ} = \vec{0}$

Car I barycentre $(A,4)$ et $(B,-1)$

J " $(A,4)$ et $(C,-1)$

d'où G est le milieu de $[IJ]$

3) $\Delta = \{M \in P,\ \|4\vec{MA} - \vec{MB}\| = \|4\vec{MA} - \vec{MC}\|\}$

a) on remplace M par A.

$\|4\vec{AA} - \vec{AB}\| = \|\vec{AB}\| = AB$

$\|4\vec{AA} - \vec{AC}\| = \|\vec{AC}\| = AC$

or $AB = AC$ d'où $A \in \Delta$

b) $4\vec{MA} - \vec{MB} = 3\vec{MI}$

$4\vec{MA} - \vec{MC} = 3\vec{MJ}$

$M \in \Delta$ équivaut $\|3\vec{MI}\| = \|3\vec{MJ}\|$

" $\cancel{3}MI = \cancel{3}MJ$

Δ est la médiatrice de $[IJ]$

4) $f(M) = M'$ équivaut $6\vec{M'J} = 8\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$.

équivaut $6\vec{M'J} = 6\vec{MG}$ car G est le barycentre des pts $(A,8)$; $(B,-1)$ et $(C,-1)$

$\vec{MM'} = \vec{GJ} = \vec{IG}$ car G milieu de $[IJ]$

f est la translation de vecteur $\vec{IG}$

b) $f(\Delta) = \Delta'$ où Δ' est la parallèle à Δ passant par $f(G) = J$.

5) $f(B) = E$ équivaut $\vec{IG} = \vec{BE}$

a) $f(B) = E$, $f(I) = G$

$f((BI)) = (EG)$

or $A \in (BI)$ d'où

$f((AI)) = (EG)$

b) $\{A\} = \Delta \cap (AI)$

$\{f(A)\} = f(\Delta) \cap f((AI))$.

$= \Delta' \cap (EG) = \{F\}$

d'où $f(A) = F$

c) on a : I barycentre $(A,4)$ et $(B,-1)$

$f(I) = G$, $f(A) = F$ et $f(B) = E$

donc G est le barycentre des pts $(F,4)$ et $(E,-1)$

car la translation conserve le barycentre