Lycée pilote Sfax 6/12/2023	Devoir de synthèse N°1	$2^{ème}$ Sc

Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule réponse est correcte.
Recopier en toute lettre sur votre copie la bonne réponse.

1) L'équation $x^2-(5-\sqrt{2})x-2=0$ admet deux racines x' et x'' tel que $x'<x''$.

$* \, 1 \in \left]x', x''\right[$ $\qquad$ $\cancel{* \, 1 \in \left]-\infty, x'\right[}$ $\qquad$ $* \, 1 \in \left]x'', +\infty\right[$.

2) L'expression $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ est définie pour tout x appartenant à

$* \, \mathbb{R}$ $\qquad$ $* \, \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ $\qquad$ $* \, \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

3) Dans la figure ci – contre :
ABCD est un parallèlogramme.
E un point de la droite (AD).
La droite (EC) coupe la droite (AB) en F.

$* \, t_{\overrightarrow{BD}}([BC])=[DE]$ $\qquad$ $* \, t_{\overrightarrow{AE}}([BC])=[BC]$ $\qquad$ $* \, t_{\overrightarrow{EC}}((AD))=(BC)$

Exercice 2 (5 points)

Soit ABCD un rectangle tels que $AB=8$ et $AD=6$.
Soit M le barycentre des points pondérés $(A, 8-2x)$ et $(B, 2x)$ où $x\in\mathbb{R}$.

1) *Déterminer l'ensemble S des réels x pour lesquels M appartient au segment [AB].*
2) On prend x dans l'intervalle $]0,4[$, on désigne par N le point du segment [AD] tel que $AN=x$ et par $A(x)$ l'aire du triangle MNC.
   a) Montrer que $AM=2x$.
   b) Montrer que $A(x)=10x-x^2$.
   c) Montrer que $A(x)$ est strictement inferieur à la somme des aires des triangles AMN, MBC et NDC.

Exercice 3 (5 points)

Soit $f(x)=\dfrac{x^4+x^2-2}{3x^2-5x+2}$.

1) Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels l'expression $f(x)$ est définie.
2) Montrer que pour tout réel x de D, $f(x)=\dfrac{(x+1)(x^2+2)}{3x-2}$.
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation, $f(x)\geq x+1$.

Exercice 4 (7 points)

On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de diamètre [BC] tel que $BC=6$. milieu de [AC]
Soit A un point du cercle $\mathscr{C}$ tel que $AC=4$, E le barycentre de (I , 2) et (B , 1).
F est l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

1) Construire les points E et F.
2) a) Montrer que la droite (EF) est l'image de la droite (AC) par $t_{\overrightarrow{BC}}$.
   b) Montrer que E est l'image du point A par $t_{\overrightarrow{BC}}$.
3) Soit Δ la tangente à $\mathscr{C}$ en B. Construire la droite Δ' image de Δ par $t_{\overrightarrow{BC}}$.
4) La droite (AC) coupe Δ en H et la La droite (EF) coupe Δ' en K.
   a) Montrer que A est le barycentre de (C , 1) et (H , 2).
   b) Montrer que K est l'image du point H par $t_{\overrightarrow{BC}}$.
5) Montrer que E est le barycentre de (F , 1) et (K , 2).

Devoir 2023

Ex1 1) $x^2-(5-\sqrt2)x-2=0$

on remplace x par 1

$1^2-(5-\sqrt2)\times 1-2=1-5+\sqrt2-2<0$

x	$-\infty$		x'		1		x''		$+\infty$
$x^2-(5-\sqrt2)x-2$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

donc $1\in]x',x''[$

2) $\frac{x^2}{x^2+4}\le 0$ équi $x^2=0$; $x=0$

$S_{\mathbb{R}}=\{0\}$

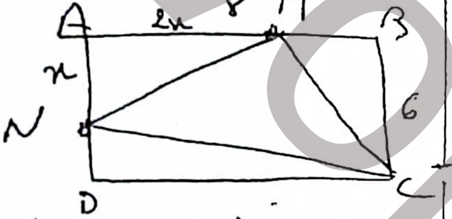
3) $(AD)\parallel(BC)$

$E\in(AD)$ et $t_{\vec{EC}}(E)=C$

$C\in(BC)$

d'où $t_{\vec{EC}}((AD))=(BC)$

Exercice 2



M bary $(A, 8-2x)$; $(B, 2x)$ $x\in\mathbb{R}$

$M\in[AB]$ équi $8-2x$ et $2x$ sont de même signe

$2x(8-2x)\geq 0$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$		$+$	
$8-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
P		$-$	0	$+$	0	$-$	

$M\in[AB]$ équi $x\in[0,4]$

$S=[0,4]$

2) $x\in]0,4[$

a) $\vec{AM}=\frac{2x}{8}\vec{AB}$

$\|\vec{AM}\|=\left|\frac{x}{4}\right|\,\|\vec{AB}\|$

d'où $AM=\frac{x}{4}\times 8=\boxed{2x}$, $0<x<$

b) $A(x)=\mathcal{A}_{ABCD}-(\mathcal{A}_{AMN}+\mathcal{A}_{MBC}+\mathcal{A}_{N}$

$=48-\left(\frac{2x\times x}{2}+\frac{(8-2x)6}{2}+\frac{(6-x)}{2}\right.$

$A(x)=48-(x^2+24-6x+24-4x)$

$=\boxed{10x-x^2}$

c) $A(x)-(x^2-10x+48)$

$=10x-x^2-(x^2-10x+48)$

$=-2x^2+20x-48$

$A(x)-(\mathcal{A}_{AMN}+\mathcal{A}_{MBC}+\mathcal{A}_{NDC})=-2x^2+20x-$

Soit l'équation : $-2x^2+20x-48=0$

$\Delta=400-384=16$

$x'=\frac{-20+4}{-4}=4$ $x''=\frac{-20-4}{-4}=6$

x	$-\infty$		4		6		$+\infty$
$-2x^2+20x-48$		$-$	0	$+$	0	$-$	

donc si $x\in]0,4[$, $A(x)-(x^2-10x+48)<0$

$A(x)<x^2-10x+48$

d'où $A(x)<\mathcal{A}_{AMN}+\mathcal{A}_{MBC}+\mathcal{A}_{NDC}$

Ex 3 $f(x)=\frac{x^4+x^2-2}{3x^2-5x+2}$

1) $f(x)$ est définie lorsque $3x^2-5x+2\neq$

Soit l'équation, $3x^2-5x+2=0$

$a+b+c=0$ $x'=1$ $x''=\frac{2}{3}$

$D=\mathbb{R}-\{1,\frac{2}{3}\}$

2) Pour $x\in D$; $f(x)=\frac{x^4+x^2-2}{3(x-\frac{2}{3})(x-1)}$

$f(x)=\frac{x^4+x^2-2}{(x-1)(3x-2)}$

Soit l'expression $x^4+x^2-2=A(x)$

on pose $t=x^2$ d'où $A(t)=t^2+t-2$

$a+b+c=0$, $t'=1$ $t''=-2$

$A(t)=1(t-1)(t+2)$

d'où $A(x) = (x^2-1)(x^2+2)$

$A(x) = (x-1)(x+1)(x^2+2)$

$f(x) = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)(x^2+2)}{\cancel{(x-1)}(3x-2)}$

$= \frac{(x+1)(x^2+2)}{3x-2}$

3) Pour $x \in D$, $f(x) \geq x+1$

équivaut $\frac{(x+1)(x^2+2)}{3x-2} - (x+1) \geq 0$

$\frac{(x+1)(x^2+2)-(x+1)(3x-2)}{3x-2} \geq 0$

$\frac{(x+1)(x^2+2-3x+2)}{3x-2} \geq 0$

$\frac{(x+1)(x^2-3x+4)}{3x-2} \geq 0$

Soit l'équation : $x^2-3x+4=0$

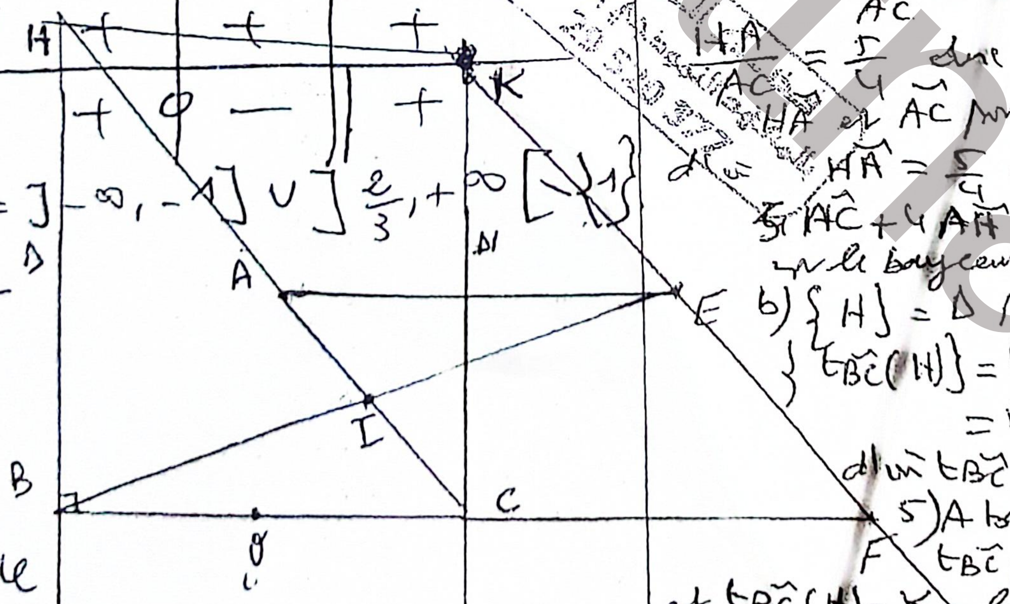
$\Delta = 9-16<0$

$a=1>0$

x	$-\infty$	-1	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$x+1$	$-$	0 $+$		$+$
$3x-2$	$-$		$-$ 0	$+$
x^2-3x+4	$+$		$+$	$+$
Q	$+$	0 $-$		$+$

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty,-1] \cup]\frac{2}{3},+\infty[\setminus \{1\}$

Ex 4



E barycentre $(I,2)$ et $(B,-1)$

donc $\vec{IE} = -\vec{IB} = \vec{BI}$ d'où I est le milieu de $[BE]$.

$t_{\vec{BC}}(C)=F$ équivaut $\vec{BC}=\vec{CF}$

d'où C est le milieu de $[BF]$

I milieu de $[AC]$ et I milieu de $[BE]$ d'où $[AC]$ et $[BE]$ ont même milieu et $\vec{AE}=\vec{BC}$ par suite $t_{\vec{BC}}(A)=E$

3) Δ est tangente à $\mathcal{C}$ en B

$\Delta' = t_{\vec{BC}}(\Delta)$ donc $\Delta' // \Delta$

$t_{\vec{BC}}(B)=C$ d'où Δ' est la parallèle à Δ passant par C

4) a) Le triangle BCH est rectangle en B ; $[BC]$ un diamètre de $\mathcal{C}$ et $A \in \mathcal{C}$ donc le triangle ABC est rectangle en A d'où $[BA]$ est la hauteur issue de B du triangle rectangle BCH, d'après les relations métriques $BA^2 = HA \times AC$.

d'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABC,

$AB^2 = BC^2 - AC^2 = 36-16 = 20$.

$HA = \frac{BA^2}{AC} = \frac{20}{4} = 5$

$\frac{HA}{AC} = \frac{5}{4}$ donc $HA = \frac{5}{4}AC$

$\vec{HA}$ et $\vec{AC}$ sont de même sens d'où $\vec{HA} = \frac{5}{4}\vec{AC}$ par suite $5\vec{AC}+4\vec{AH}=\vec{0}$ d'où A est le barycentre de $(C,5)$ et $(H,4)$.

b) $\{H\} = \Delta \cap (AC)$.

$\{t_{\vec{BC}}(H)\} = t_{\vec{BC}}(\Delta) \cap t_{\vec{BC}}((AC))$

$= \Delta' \cap (EF) = \{K\}$

d'où $t_{\vec{BC}}(H)=K$.

5) A barycentre $(C,5)$ et $(H,4)$, $t_{\vec{BC}}(A)=E$, $t_{\vec{BC}}(C)=F$ et $t_{\vec{BC}}(H)=K$, la translation conserve le barycentre d'où E barycentre $(F,5)$ et $(K,4)$.