Lycée Pilote Sfax	Devoir de synthèse n°1 Mathématiques	2ème sciences
		Durée : 2 H

4

EXERCICE N°1 (3points)

On donne $A(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, dont le tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$2\sqrt{2}$		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

1/ Déterminer le signe de chacun des réels a, b et c

2/ On prend $a = -2$. Déterminer l'expression de $A(x)$

EXERCICE N°2 (7points)

On donne $A(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

1/Factoriser $x^3 + 8$ puis déduire une factorisation de $A(x)$

2/ Résoudre dans IR l'équation $A(x) = 0$ puis déduire les solutions de l'équation : $|x|(x^2 - 6) = 3x^2 - 8$

3/ On pose $B(x) = \dfrac{A(x)}{x^4 - 17x^2 + 16}$

a- Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels $B(x)$ a un sens

b- Vérifier que pour tout $x \in D$; $B(x) = \dfrac{x+2}{x^2 + 5x + 4}$

c- Résoudre dans IR l'inéquation $B(x) \leq \dfrac{2}{4x+1}$

EXERCICE N°3 (5points)

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne les points A (-1,2) ; B (2,1) ; C (8,-1) ; E (0,
et N (4,-3) F(6,3)

1/ Montrer que les points A ,B et C sont alignés

2/ Soit $\zeta = \{M \in P, \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{ME}\}$

a- Montrer que $A \in \zeta$

b- Déterminer l'ensemble ζ

3/ Déterminer les coordonnées du point F tel que EBCF est un parallélogramme

4/ Montrer que (FN) est l'image de la droite (AE) par $t_{\overrightarrow{BC}}$

5/ Soit ζ le cercle de diamètre $[EB]$

a- Déterminer et construire ζ' image de ζ par $t_{\overrightarrow{BC}}$

b- (FN) recoupe ζ' en D. Montrer que D se trouve sur l'axe des abscisses

EXERCICE N°4 (5points)

ABCD est un parallélogramme de centre O , I est le milieu de $[AB]$ et les droites (IC) et (BD) se coupent en G

1/ Montrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

2/ Déduire que A est le barycentre des points pondérés (C,-2) ; (D,1) et (G,3)

3/ Soit l'application t : $P \rightarrow P$; $M \mapsto M'$ tel que $\overrightarrow{AM'} = 2\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GM}$

Montrer que t est la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$

4/ Construire $O' = t(O)$

5/ Soit E le symétrique de B par rapport à C. Montrer que O' est le milieu de $[DE]$

6/ La droite (AE) coupe (CO') en G'. Montrer que $t(G) = G'$

Devoir

Ex1 $A(x) = ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$

x	$-\infty$		$-1/2$		$2\sqrt{2}$		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

1) si $x\in[-\frac{1}{2}, 2\sqrt{2}]$ alors $A(x)\geq 0$
d'où $a<0$

$S = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}+2\sqrt{2} > 0$, $\frac{b}{a}<0$

or $a<0$ d'où $b>0$

$P = \frac{c}{a} = -\sqrt{2} < 0$ d'où $c>0$

2) $a=-2$; $\frac{c}{a} = -\sqrt{2}$

d'où $c = 2\sqrt{2}$

$-\frac{b}{a} = 2\sqrt{2}-\frac{1}{2}$

$-b = -4\sqrt{2}+1$

$b = 4\sqrt{2}-1$

d'où $A(x) = -2x^2+(4\sqrt{2}-1)x+2\sqrt{2}$

ou bien $A(x) = -2\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-2\sqrt{2}\right)$

Ex2 $A(x) = x^3-3x^2-6x+8$

1) $x^3+8 = (x+2)(x^2-2x+4)$

$A(x) = (x+2)(x^2-2x+4)-3x(x+2)$

$A(x) = (x+2)(x^2-5x+4)$.

2) $A(x)=0$ eq à $x+2=0$ ou $x^2-5x+4=0$

$x=-2$ ou $a+b+c=0$

$x'=1$, $x''=4$

$S_{\mathbb{R}} = \{-2, 1, 4\}$

$|x|(x^2-6) = 3x^2-8$

on pose $t=|x|$

d'où $t(t^2-6) = 3t^2-8$

$t^3-3t^2-6t+8=0$

$A(t)=0$ d'où $t=-2$

ou $t=1$ ou $t=4$:

* si $t=-2$ alors $|x|=-2 \rightarrow \emptyset$
* si $t=1$ alors $|x|=1$ d'où $x=1$ ou $x=-1$
* si $t=4$ alors $|x|=4$ d'où $x=4$ ou $x=-4$

$S_{\mathbb{R}} = \{1,-1,4,-4\}$

3) $B(x) = \dfrac{A(x)}{x^4-17x^2+16}$

a) $B(x)$ a un sens lorsque $x^4-17x^2+16\neq 0$

Soit l'équation $x^4-17x^2+16=0$

on pose $t=x^2$ d'où

$t^2-17t+16=0$

$a+b+c=0$

$t'=1 \quad t''=16$

* si $t=1$ alors $x^2=1$ d'où $x=1$ ou $x=-1$
* si $t=16$ alors $x^2=16$ d'où $x=4$ ou $x=-4$

$D = \mathbb{R}\setminus\{1,-1,4,-4\}$

b) Pour $x\in D$.

$B(x) = \dfrac{(x+2)(x^2-5x+4)}{(x^2-1)(x^2-16)}$

$= \dfrac{(x+2)\cancel{(x-1)}\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)\cancel{(x-4)}(x+4)}$

$= \dfrac{x+2}{(x+1)(x+4)} = \dfrac{x+2}{x^2+x+4x+4}$

$\boxed{B(x) = \dfrac{x+2}{x^2+5x+4}}$

c) $B(x) \leq \dfrac{2}{4x+1}$

Condition:

$x\in D$ et $4x+1\neq 0$

$x\neq -\frac{1}{4}$

$x\in\mathbb{R}\setminus\{1,-1,4,-4,-\frac{1}{4}\}$

$\dfrac{x+2}{x^2+5x+4} - \dfrac{2}{4x+1} \leq 0$.

$\dfrac{(x+2)(4x+1)-2(x^2+5x+4)}{(x^2+5x+4)(4x+1)} \leq$

$\dfrac{4x^2+x+8x+2-2x^2-10x-8}{(x^2+5x+4)(4x+1)} \leq$

éq $\dfrac{2x^2 - x - 6}{(x^2+5x+4)(4x+1)} \leq 0$

Soit l'équation : $2x^2 - x - 6 = 0$

$\Delta = 49$, $x' = -\frac{3}{2}$ $x'' = 2$.

x	$-\infty$		-4		$-\frac{3}{2}$		-1		$-\frac{1}{4}$		2		$+\infty$
$2x^2-x-6$		+		+	0	−		−		−	0	+	
x^2+5x+4		+	0	−		−	0	+		+		+	
$4x+1$		−		−		−		−	0	+		+	
Q		−	‖	+	0	−	‖	+	‖	−	0	+	

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty, -4[\cup [-\frac{3}{2}, -1[\cup]-\frac{1}{4}, 2] \setminus \{1\}$

Ex3 $A(-1,2)$; $B(2,1)$; $C(8,-1)$, $E(0,5)$
$N(4,-3)$.

1) $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}9\\-3\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}3 & 9\\ -1 & -3\end{vmatrix} = -9+9 = 0$ donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires et A un pt commun d'où les pts A, B et C sont alignés

2) $\mathcal{C} = \{M \in P, \vec{MB} \perp \vec{ME}\}$

a) $\vec{AE}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ $xx' + yy' = 3 - 3 = 0$

donc $\vec{AB} \perp \vec{AE}$

d'où $A \in \mathcal{C}$.

b) $M \in \mathcal{C}$ éq $\vec{MB} \perp \vec{ME}$ éq $(MB) \perp (ME)$

$\mathcal{C}$ est le cercle de diamètre $[BE]$

3) EBCF est un parallélogramme

éqà $\vec{EB} = \vec{FC}$

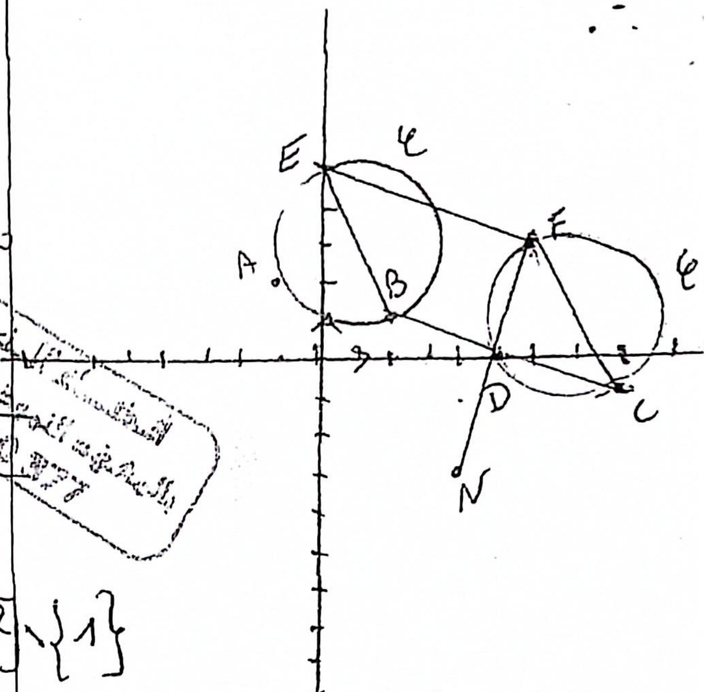
$x_B - x_E = x_C - x_F$; $y_B - y_E = y_C - y_F$

$2 - 0 = 8 - x_F$

$x_F = 6$; $1 - 5 = -1 - y_F$

$y_F = 3$

$\boxed{F(6,3)}$



$\vec{AE}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ $\vec{FN}\begin{pmatrix}-2\\-6\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & -6\end{vmatrix} = -6+6 = 0$ donc $\vec{AE}$ et $\vec{FN}$ sont colinéaires d'où $(AE) \parallel (FN)$

$\vec{EF} = \vec{BC}$ donc $t_{\vec{BC}}(E) = F$

d'où $t_{\vec{BC}}((AE)) = (FN)$

5) $t_{\vec{BC}}(E) = F$ et $t_{\vec{BC}}(B) = C$

$\mathcal{C}' = t_{\vec{BC}}(\mathcal{C})$ est le cercle de diamètre $[FC]$.

Car $[FC] = t_{\vec{BC}}([EB])$.

6) $A \in (AE) \cap \mathcal{C}$.

$t_{\vec{BC}}(A) \in t_{\vec{BC}}((AE)) \cap t_{\vec{BC}}(\mathcal{C})$

$t_{\vec{BC}}(A) \in (FN) \cap \mathcal{C}'$

$\in \{F, D\}$

or $F = t_{\vec{BC}}(E)$

d'où $t_{\vec{BC}}(A) = D$.

$\vec{BC} = \vec{AD}$

$x_C - x_B = x_D - x_A$ | $y_C - y_B = y_D - y_A$

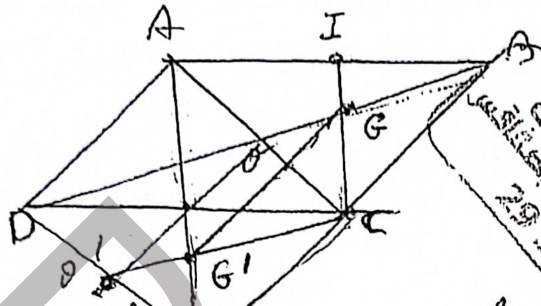
$8 - 2 = x_D + 1$ | $-1 - 1 = y_D$

$x_D = 5$ | $y_D = 0$

$D(5,0)$ d'où $D \in (O, \vec{i})$

Suite du devoir 2012

Ex 4



1) Dans le triangle ABC, O milieu de [AC] donc [BO] est la médiane issue de B et I milieu de [AB] donc [CI] est la médiane issue de C or $\{G\} = (IC) \cap (OB)$ d'où G est le centre de gravité du triangle ABC

2) $-2\vec{AC} + \vec{AD} + 3\vec{AG}$

$= -2\vec{AC} + \vec{BC} + 3\vec{AG}$

$= -2\vec{AC} + \vec{BA} + \vec{AC} + 3\vec{AG}$

$= -\vec{AC} - \vec{AB} + 3\vec{AG}$

$= -\vec{AG} - \vec{GC} - \vec{AG} - \vec{GB} + 3\vec{AG}$

$= -\vec{AG} - \vec{GC} - \vec{GB} = -(\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC})$

$= \vec{0}$ d'où A est le barycentre des pts $(C,-2)$; $(D,1)$ et $(G,3)$

3) $t(M) = M'$ equi $\vec{AM'} = 2\vec{GC} + \vec{GM}$

$\vec{AM} + \vec{MM'} = 2\vec{GC} + \vec{GM}$

$\vec{MM'} = 2\vec{GC} + \vec{GA}$

$= 2\vec{GC} - \vec{GB} - \vec{GC}$

$= \vec{GC} - \vec{GB} = \vec{BC} = \vec{AD}$

d'où t est la translation de vecteur $\vec{AD}$

4) $t(O) = O'$ équi $\vec{AD} = \vec{OO'}$

5) on a C est le milieu de [BE] donc $\vec{BC} = \vec{CE}$ or $\vec{BC} = \vec{AD}$ d'où $\vec{AD} = \vec{CE}$ d'où $t(C) = E$

$t(A) = D$ d'où $t([AC]) = [DE]$ or O le milieu de [AC] et $t(O) = O'$ d'où O' le milieu de [DE] car la translation conserve le milieu.

6) Dans le triangle ABE

I milieu [AB]

C " " [BE]

donc $(IC) \parallel (AE)$.

$t(C) = E$

d'où $t((IC)) = (AE)$.

$t((BO)) = (CO')$.

$\{G\} = (BO) \cap (IC)$.

$\{t(G)\} = t((BO)) \cap t((IC))$

$= (CO') \cap (AE) = \{G'\}$

d'où $t(G) = G'$