LYCEE PILOTE DE SFAX	DEVOIR DE SYNTHESE N°1	DUREE : 2 HEURES
$2^{ème}$ *sciences*	***MATHEMATIQUES***	

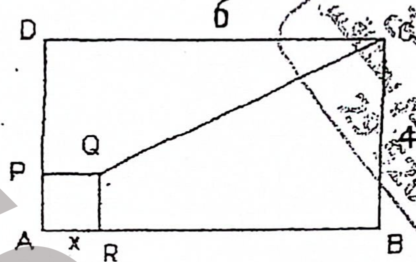
EXERCICE N°1(3,5points)

Soit ABCD un rectangle de longueur 6 et de largeur 4 . On construit un carré APQR tel que $P \in [AD]$ et $R \in [AB]$. On pose AR = x et $x \succ 0$

1/ Peut – on avoir pour une valeur de x l'égalité des aires des trapèzes RQCB et PQCD ?

2/ Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire du trapèze RQCB soit supérieure ou égale à l'aire du carré ARQP

3/ Déterminer l'aire maximale du trapèze RQCB



6

EXERCICE N°2(8points)

Soit $A(x) = 3x^2 + 11x + 10$

1/a- Résoudre dans IR l'équation A(x) = 0

b- En déduire la résolution dans IR de l'équation $\dfrac{27}{(x-1)^2} + \dfrac{33}{x-1} + 10 = 0$

c- Résoudre dans IR l'inéquation $3x^3 + 11x^2 + 10x \leq 0$

2/ Soit $B(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$

a- Vérifier que pour tout réel x , $B(x) = 2(x^3 + 8) - A(x)$

b- Factoriser A(x) puis déduire une factorisation de B(x)

3/ Soit $f(x) = \dfrac{B(x)}{2x^2 - 3x - 9}$

a- Déterminer l'ensemble E des réels x pour lesquels f(x) est définie

b- Montrer que pour tout $x \in E$, $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 2}{2x + 3}$

c- Résoudre dans IR l'inéquation $|2x - f(x)| \geq 1$

EXERCICE N°3(8,5points)

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A tel que AB = 4. Soit I le milieu de $[BC]$ et J le barycentre des points pondérés (I , 3) et (C, -1)

1/ a- Construire J puis montrer que J est le milieu de $[BI]$

b- Montrer que I est le barycentre des points pondérés (C, 1) et (J, 2)

2/ Soit f la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

a- Construire K = f (I)

b- Montrer que K appartient à la médiatrice de $[AC]$

3/ Soit $\zeta = \left\{ M \in P, \left\| \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MJ} \right\| = 6\sqrt{2} \right\}$

a- Montrer que ζ est le cercle circonscrit au triangle ABC et tracer ζ

b- Déterminer et construire $\zeta' = f(\zeta)$

4/ Soit L le point tel que $\overrightarrow{KL} = \frac{-1}{4}\overrightarrow{BC}$

a- Montrer que f (J) = L

b- Déterminer f((BC))

5/ La demi-droite $[LK)$ coupe ζ' en E

~~a- Montrer que f (C) = E~~

b- Déduire que K est le barycentre des points L et E affectés des coefficients qu'on précisera

c- Montrer que (LK) est tangente à ζ en E

Devoir

Ex1 $DC = 6$, $BC = 4$

1) $\mathcal{A}_{RQCB} = \frac{(RQ+BC)\times BR}{2}$

$= \frac{(x+4)(6-x)}{2}$

$= \frac{-x^2+2x+24}{2}$

$\mathcal{A}_{PQCD} = \frac{(PQ+DC)\times PD}{2}$

$= \frac{(6+x)(4-x)}{2}$

$= \frac{24-x^2-2x}{2}$

pour que $\mathcal{A}_{RQCB} = \mathcal{A}_{PQCD}$

$2x = -2x$

$4x = 0$

$x = 0$ ce qui est impossible

Car $x > 0$.

2) $\mathcal{A}_{RQCB} \geq x^2$

$\frac{-x^2+2x+24}{2} \geq x^2$

$-x^2+2x+24 \geq 2x^2$

$3x^2-2x-24 \leq 0$

Soit l'équation : $3x^2-2x-24=0$

$\Delta' = 1+72 = 73 > 0$

$x' = \frac{1-\sqrt{73}}{3}$ $\quad x'' = \frac{1+\sqrt{73}}{3}$

x	$-\infty$		x'		x''		$+\infty$
$3x^2-2x-24$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S_{\mathbb{R}} = \left[\frac{1-\sqrt{73}}{3}, \frac{1+\sqrt{73}}{3}\right] \cap]0,4[$

$= \left]0, \frac{1+\sqrt{73}}{3}\right]$

3) $A(x) = -\frac{1}{2}x^2+x+12 = \mathcal{A}_{RQCB}$

$= -\frac{1}{2}(x^2-2x-24)$

$= -\frac{1}{2}\left[(x-1)^2-1-24\right]$

$= -\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{25}{2}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-\frac{1}{2}(x-1)^2 \leq 0$

$-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{25}{2} \leq \frac{25}{2}$

$A(x) \leq \frac{25}{2}$

$\frac{25}{2}$ est l'aire maximale du trapèze RQCB.

Ex2 $A(x) = 3x^2+11x+10$.

a) $A(x) = 0$ équivaut $3x^2+11x+10 = 0$.

$\Delta = 121-120 = 1 > 0$

$x' = \frac{-11-1}{6} = -2$, $x'' = \frac{-11+1}{6} = -\frac{5}{3}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-2, -\frac{5}{3}\right\}$

b) on pose $t = \frac{3}{x-1}$ $\quad (x \neq 1)$

d'où $3t^2+11t+10 = 0$

donc $t' = -2$; $t'' = -\frac{5}{3}$

$\frac{3}{x-1} = -2$ | $\frac{3}{x-1} = -\frac{5}{3}$

$3 = -2x+2$ | $9 = -5x+5$

$x = -\frac{1}{2}$ | $x = -\frac{4}{5}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{4}{5}\right\}$

c) $3x^3+11x^2+10x \leq 0$

$x(3x^2+11x+10) \leq 0$

x	$-\infty$		-2		$-5/3$		0		$+\infty$
x		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x^2+11x+10$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
P		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty, -2] \cup \left[-\frac{5}{3}, 0\right]$

2) $B(x) = 2(x^3+8) - A(x)$

a) $2(x^3+8) - A(x)$

$= 2x^3+16-3x^2-11x-10$

$= 2x^3-3x^2-11x+6 = B(x)$

b) $A(x) = 3(x+2)\left(x+\frac{5}{3}\right)$

$= (x+2)(3x+5)$

$= 3x^2+11x+10$

$B(x) = 2(x+2)(x^2-2x+4) - (x+2)(3x+$

$B(x) = (x+2)(2x^2-4x+8-3x-5)$

$= (x+2)(2x^2-7x+3)$

3) $f(x) = \dfrac{B(x)}{2x^2-3x-9}$

a) $f(x)$ est définie si $2x^2-3x-9 \neq 0$

Soit l'équation : $2x^2-3x-9=0$

$\Delta = 9+72 = 81 = 9^2 > 0$

$x' = \dfrac{3-9}{4} = -\dfrac{3}{2}$, $x'' = \dfrac{3+9}{4} = 3$

$E = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, 3\}$

b) $x \in E$, $f(x) = \dfrac{(x+2)(2x^2-7x+3)}{2(x+\frac{3}{2})(x-3)}$

Soit l'équation $2x^2-7x+3=0$

$\Delta = 49-24 = 25 = 5^2 > 0$

$x' = \dfrac{7-5}{4} = \dfrac{1}{2}$; $x'' = \dfrac{7+5}{4} = 3$

$f(x) = \dfrac{(x+2)\,2(x-\frac{1}{2})\cancel{(x-3)}}{2(x+\frac{3}{2})\cancel{(x-3)}}$

$= \dfrac{(x+2)(2x-1)}{2x+3} = \dfrac{2x^2+3x-2}{2x+3}$

c) $|2x - f(x)| \geq 1$ équi

$2x - f(x) \geq 1$ ou $2x - f(x) \leq -1$

$2x - \dfrac{2x^2+3x-2}{2x+3} - 1 \geq 0$

$\dfrac{4x^2+6x-2x^2-3x+2-2x-3}{2x+3} \geq 0$

$\dfrac{2x^2+x-1}{2x+3}$

Soit l'équation $2x^2+x-1=0$
$a-b+c=0$
$x'=-1$
$x''=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$-3/2$	-1	$1/2$	$+\infty$
$2x^2+x-1$	+		+	− 0	+
$2x+3$	−	0	+	+	+
Q	−	‖	+ 0	− 0	+

$S_1 =]-\frac{3}{2}, -1] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[\setminus \{3\}$

* $2x - f(x) + 1 \leq 0$

$2x - \dfrac{2x^2+3x-2}{2x+3} + 1 \leq 0$

$\dfrac{4x^2+6x-2x^2-3x+2+2x+3}{2x+3} \leq 0$

$\dfrac{2x^2+5x+5}{2x+3} \leq 0$

Soit l'équation $2x^2+5x+5=0$

$\Delta = 25-40 < 0$. $a = 2 > 0$

x	$-\infty$	$-3/2$	$+\infty$
$2x+3$	−	0	+
$2x^2+5x+5$	+		+
Q	−	‖	+

$S_2 =]-\infty, -\frac{3}{2}[$

$S_{\mathbb{R}} = S_1 \cup S_2$

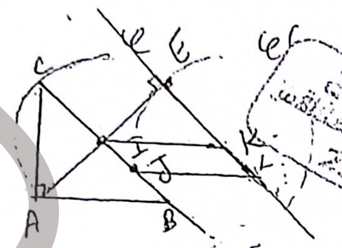
$S_{\mathbb{R}} =]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup]-\frac{3}{2}, -1] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[\setminus \{3\}$

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty, -1] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[\setminus \{-\frac{3}{2}, 3\}$

Suite du devoir 2013

Ex 3

AB = 4 ; I milieu de [BC].



1) a) J bary de (I, 3) et (C, −1) équivaut $\vec{IJ} = -\frac{1}{2}\vec{IC}$

$\vec{BJ} = \vec{BI} + \vec{IJ} = \vec{BI} - \frac{1}{2}\vec{IC}$

$\vec{BJ} = \vec{BI} - \frac{1}{2}\vec{BI} = \frac{1}{2}\vec{BI}$

d'où J est le milieu de [BI]

b) on a $\vec{CJ} = \frac{3}{2}\vec{CI}$

$\vec{CI} = \frac{2}{3}\vec{CJ} = \frac{2}{2+1}\vec{CJ}$

d'où I bary (C, 1) et (J, 2)

2) $f = t_{\vec{AB}}$

a) f(I) = K équivaut $\vec{AB} = \vec{IK}$

(AB) ∥ (IK) or (AB) ⊥ (AC) d'où (IK) ⊥ (AC) ①

Dans le triangle rectangle ABC ; I milieu de [BC] donc IA = IC ②

① et ② donnent (IK) est la médiatrice de [AC] par suite K appartient à la médiatrice de [AC]

3) $\mathcal{C} = \{M \in P, \|\vec{MC} + 2\vec{MJ}\| = 6\sqrt{2}\}$

a) $\vec{MC} + 2\vec{MJ} = 3\vec{MI}$ car I barycentre (C, 1) et (J, 2)

$M \in \mathcal{C}$ éq $\|3\vec{MI}\| = 6\sqrt{2}$

$3\,MI = 6\sqrt{2}$

$MI = 2\sqrt{2}$

ABC est un triangle rectangle en A donc il est inscrit dans un cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre [BC], de centre I et de rayon $\frac{BC}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

$M \in \mathcal{C}$ éq $MI = 2\sqrt{2}$

d'où $\mathcal{C}$ est le cercle de centre I et de rayon $2\sqrt{2}$

d'où $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$

b) f(I) = K.

$\mathcal{C}' = f(\mathcal{C})$ est le cercle de centre K et de rayon $2\sqrt{2}$

4) $\vec{KL} = -\frac{1}{4}\vec{BC}$ on a : $\vec{BJ} = \frac{1}{4}\vec{BC}$

$\vec{KL} = \vec{JB}$ d'où $\vec{KL} = \vec{IJ}$

d'où $\vec{KI} = \vec{LJ}$ or $\vec{IK} = \vec{AB}$ car f(I) = K.

d'où $\vec{IK} = \vec{JL} = \vec{AB}$

par suite f(J) = L.

5) I ∈ (BC) ; J ∈ (BC)

f(I) = K f(J) = L.

f((IJ)) = (KL)

or (IJ) et (BC) sont confondues

d'où f((BC)) = (KL).

5) C ∈ [JI) ∩ $\mathcal{C}$.

f(C) ∈ f([JI)) ∩ f($\mathcal{C}$)

∈ [LK) ∩ $\mathcal{C}'$ = {E}

d'où f(C) = E

6) I bary (C, 1) et (J, 2)

f(I) = K, f(C) = E et f(J) = L

donc K bary (E, 1) et (L, 2) car la translation conserve le barycentre

c) f(C) = E donc $\vec{AB} = \vec{CE}$

AB = AC et (AB) ⊥ (AC) donc ABEC est un carré ;

$B\hat{E}C = 90°$; [BC] un diamètre de $\mathcal{C}$

donc E ∈ $\mathcal{C}$; f(I) = K ; f(J) = L

donc (IJ) ∥ (KL) càd (LK) ∥ (BC)

or (BC) ⊥ (AE) d'où (LK) ⊥ (AE) en E

I ∈ (AE) d'où (IE) ⊥ (LK) en E