Lycée pilote Sfax	Devoir de synthèse : N°1	Classes : 2 Sciences
08 – 12 -2014	Mathématiques	Durée 2 heures

7

Exercice N°1 : (3 points)

On donne $A(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ où a , b et c sont des réels non nuls dont le tableau de signe est :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
A(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	

1) a) Donner le signe des réels a , b et c

b) En déduire le tableau de signe de l'expression $c\,x^2 + b\,x + a$

2) a) On prend $a = -2$, déterminer l'expression de $A(x)$

b) Soit t un réel , déterminer le signe de l'expression $-2\left(\frac{|t|+2}{|t|+1}\right)^2 - 2\left(\frac{|t|+2}{|t|+1}\right) + 4$

Exercice N° 2: (2,5 points)

Dans la figure ci-contre :

ABCD est un trapèze rectangle en A et D tels que AB = AD = 6 cm et DC = 5 cm

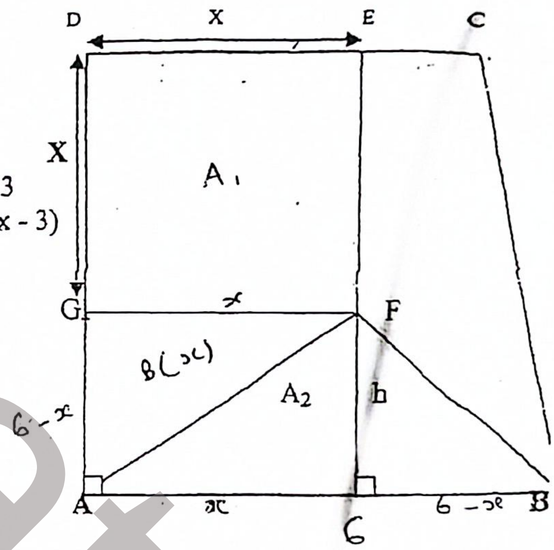
EFGD est un carré de coté x et d'aire A_1 , $x \in]0,5]$

ABF est un triangle de hauteur h et d'aire A_2

On désigne par B(x) l'aire du triangle AGF et par $A(x) = A_1 + A_2$

1) Montrer que $A(x) = x^2 - 3\,x + 18$

2) Déterminer l'ensemble S des réels x tel que $A(x) \geq 4\,B(x)$



Exercice N° 3: (5,5 points)

On donne $B(x) = x^2 - 4\,x + 3$ et $A(x) = (2\,x^2 + x)^2 - 4\,(2\,x^2 + x) + 3$

1) a) Factoriser B(x) en déduire que $A(x) = (2x^2 + x - 1)(2\,x^2 + x - 3)$

b) Résoudre dans IR l'inéquation $(x-1)\,A(x) \leq 0$

2) Soit $f(x) = \dfrac{A(x)}{4x^3+4x^2-3x}$

a) Déterminer l'ensemble E des réels x tel que f(x) a un sens

b) Simplifier f(x) pour tout $x \in E$

c) Résoudre dans IR , l'inéquation $f(x) \geq 3\,x + 2\sqrt{2}$

Exercice N°4: (9 points)

ABC est un triangle équilatéral de coté 4

Soient D le barycentre des points (A, -2) et (C, 5)

E l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$

F l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AE}$

1) a) Construire les points D , E et F

b) Déterminer l'image de la droite (CD) par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$ et l'image de la droite (AC) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AE}$

c) Montrer que les points E , B et F sont alignés .

2) Soit l'application $f : P \longrightarrow P$

$$M \longmapsto M' \text{ tel que } \overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{DB} - 5\overrightarrow{DC}$$

Montrer que f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

3) La parallèle à (AB) passant par C coupe (BE) en C' .

Montrer que F est le barycentre des points B et C' affectés de coefficients que l'on précisera.

4) Soient $\mathscr{C}$ le cercle de centre C et passant par A et $\mathscr{C}' = f(\mathscr{C})$

a) Déterminer et construire $\mathscr{C}'$

b) La droite (AC) recoupe $\mathscr{C}$ en G , Montrer que $G \in \mathscr{C}'$

5) La droite (GC') recoupe $\mathscr{C}'$ en B' , Montrer que f(B) = B'

Ex1 1) a) $A(x) \geq 0$ si $x \in [-2,1]$ donc $a<0$

$P = x'x'' = \frac{c}{a} = -2 < 0$ et $a<0$ donc $c>0$

$S = x'+x'' = -\frac{b}{a} = -1$ d'où $-\frac{b}{a} < 0$ or $a<0$ d'où $b<0$

b) On a : 1 est une racine de $A(x)=0$ donc $a+b+c=0$ d'où $c+b+a=0$ donc 1 est une racine de $cx^2+bx+a=0$

$P' = \frac{a}{c} = -\frac{1}{2}$ car $\frac{c}{a} = -2$

$1 \times \alpha = -\frac{1}{2}$ (α l'autre racine)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1	
cx^2+bx+a		$+$	0	$-$	0	$+$

2) a) $a=-2$, $\frac{c}{a}=-2$ d'où $c=4$

$-\frac{b}{a} = 1$ alors $b=-2$

d'où $A(x) = -2x^2-2x+4$

ou bien : $A(x) = -2(x+2)(x-1)$
$= -2(x^2+x-2)$
$= \boxed{-2x^2-2x+4}$

On pose $X = \frac{|t|+2}{|t|+1} = \frac{|t|+1+1}{|t|+1} = 1+\frac{1}{|t|+1}$

donc $X > 1$; $X \in]1,+\infty[$

$A(X) < 0$ D'après tableau

d'où $A\left(\frac{|t|+2}{|t|+1}\right) < 0$ par suite

$-2\left(\frac{|t|+2}{|t|+1}\right)^2 - 2\left(\frac{|t|+2}{|t|+1}\right) + 4 < 0$

Ex2 1) On a $A_1(x) = x^2$, $A_2(x) = \frac{(6-x)6}{2} = 3(6-x)$

alors $A(x) = A_1(x) + A_2(x) = x^2-3x+18$

2) $B(x) = \frac{GF \times AG}{2} = \frac{x(6-x)}{2} = \frac{-x^2+6x}{2}$

$A(x) \geq 4B(x)$ équivaut

$x^2-3x+18 \geq -2x^2+12x$

équivaut $3x^2-15x+18 \geq 0$

Soit l'équation : $3x^2-15x+18=0$

$\Delta = 9$, $x'=2$, $x''=3$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$3x^2-15x+18$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = (]-\infty,2] \cup [3,+\infty[) \cap]0,5]$
$=]0,2] \cup [3,5]$

Ex3 1) a) $B(x) = x^2-4x+3$

$a+b+c=0$, $x'=1$, $x''=3$

$\boxed{B(x) = (x-1)(x-3)}$

$A(x) = (2x^2+x)^2 - 4(2x^2+x) + 3$

On pose $t = 2x^2+x$

$A(t) = t^2-4t+3$
$= (t-1)(t-3)$

d'où $A(x) = (2x^2+x-1)(2x^2+x-3)$

b) $(x-1)A(x) \leq 0$

Soit l'équation $2x^2+x-1=0$

$a-b+c=0$, $x'=-1$, $x''=\frac{1}{2}$

Soit : $2x^2+x-3=0$, $a+b+c=0$

$x'=1$, $x''=-\frac{3}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x^2+x-1$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$2x^2+x-3$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
P		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

$S =]-\infty,-\frac{3}{2}] \cup [-1,\frac{1}{2}] \cup \{1\}$

2) $f(x) = \frac{A(x)}{4x^3+4x^2-3x}$

$f(x) = \frac{(2x^2+x-1)(2x^2+x-3)}{x(4x^2+4x-3)}$

a) $f(x)$ a un sens lorsque $x \neq 0$ et $4x^2+4x-3 \neq 0$

Soit l'équation $4x^2+4x-3=0$

$\Delta = 64 = 8^2$ $x' = \frac{-4-8}{8} = -\frac{3}{2}$

$x'' = \frac{-4+8}{8} = \frac{1}{2}$

$E = \mathbb{R} \setminus \{0, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\}$

b) pour $x \in E$

$$f(x) = \frac{2(x+1)\cancel{(x-\frac{1}{2})}\,2(x-1)\cancel{(x+\frac{3}{2})}}{x\;4\cancel{(x+\frac{3}{2})}\cancel{(x-\frac{1}{2})}}$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x}$$

c) $f(x) > 3x + 2\sqrt{2}$ pour $x \in E$

$$\frac{x^2-1}{x} - (3x+2\sqrt{2}) > 0$$

$$\frac{x^2-1-3x^2-2\sqrt{2}x}{x} > 0$$

$$\frac{-2x^2-1-2\sqrt{2}x}{x} > 0$$

soit l'équation $-2x^2-2\sqrt{2}x-1=0$

$\Delta = 8-8=0$

$$x' = x'' = \frac{-b}{2a} = \frac{2\sqrt{2}}{-4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$+\infty$
$-2x^2-2\sqrt{2}x-1$		$-$	0	$-$		$-$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
Q		$+$	0	$+$	$\|$	$-$	

$$S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty, 0\right[\setminus \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$$

Ex 4

1) a) D barycentre $(A, -2)$ et $(C, 5)$ équivaut $\vec{AD} = \frac{5}{3}\vec{AC}$

$t_{\vec{CB}}(D) = E$ équivaut $\vec{CB} = \vec{DE}$

$t_{\vec{AE}}(C) = F$ équivaut $\vec{AE} = \vec{CF}$

b) $\left.\begin{array}{l} t_{\vec{CB}}(D) = E \\ t_{\vec{CB}}(C) = B \end{array}\right\}$ $t_{\vec{CB}}((DC)) = (EB)$ d'où $(DC) \parallel (EB)$ ①

$\left.\begin{array}{l} t_{\vec{AE}}(A) = E \\ t_{\vec{AE}}(C) = F \end{array}\right\}$ $t_{\vec{AE}}((AC)) = (EF)$ d'où $(AC) \parallel (EF)$ ②

or (AC) et (CD) sont confondues $D \in (AC)$ car D barycentre $(A, -2)$ et $(C, 5)$

d'où $(EF) \parallel (EB)$ et E un point commun donc les pts E, F et B sont alignés

2) $f(M) = M'$ équivaut à $\vec{AM'} = \vec{DM} + \vec{DA} - 5\vec{DC}$

$\vec{AM'} = \vec{DA} + \vec{AM} + \vec{DA} + \vec{AB} - 5\vec{DC}$

$\vec{AM'} - \vec{AM} = \underbrace{2\vec{DA} - 5\vec{DC}}_{} + \vec{AB}$

d'où $\vec{MM'} = \vec{AB}$ donc f est la translation de vecteur $\vec{AB}$

3) $f(A) = B$; $(AB) \parallel (CC')$ et $(AC) \parallel (BC')$ d'où $ACC'B'$ est un parallélogramme donc $\vec{AB} = \vec{CC'}$ par suite $f(C) = C'$

$\vec{DF} = \vec{DC} + \vec{CF} = \vec{EB} + \vec{AE} = \vec{AB}$

d'où $f(D) = F$

or D est le barycentre $(A, -2)$ et $(C, 5)$ donc F est le barycentre $(B, -2)$ et $(C', 5)$ car la translation conserve le barycentre

4) a) $\mathscr{C}$ est le cercle de centre C et de rayon CA donc $\mathscr{C}' = f(\mathscr{C})$ est le cercle de centre C' et de même rayon CA

b) $\vec{AB} = \vec{CC'}$ donc $\vec{AC} = \vec{BC'}$

or $\vec{AC} = \vec{CG}$ car $[AG]$ diamètre de $\mathscr{C}$

d'où $\vec{BC'} = \vec{CG}$ par suite $\vec{BC} = \vec{C'G}$

d'où $BC = C'G$ or $B \in \mathscr{C}$

d'où $G \in \mathscr{C}'$

5) $\vec{CB} = \vec{GC'}$ ①

$[GB']$ est un diamètre du cercle $\mathscr{C}'$

donc $\vec{GC'} = \vec{C'B'}$ ②

① et ② donnent $\vec{CB} = \vec{C'B'}$

donc $\vec{CC'} = \vec{BB'}$

or $\vec{CC'} = \vec{AB}$

d'où $\vec{AB} = \vec{BB'}$

par suite $f(B) = B'$