Lycée Pilote Sfax	**Devoir de Synthèse N°1**	*$2^{ème}$Année Sciences*
Le 07/12/2015		*2 heures*

8

Exercice 1 (6 pts)

1°) a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-2x^3+5x^2-3x \geq 0$.

b. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $-2x^2|x| \geq 3|x|-5x^2$.

2°) Soit $A(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{-2x^3+5x^2-3x}$.

a. Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels $A(x)$ a un sens.

b. Montrer que pour tout $x \in D$, $A(x)=\dfrac{2x+1}{-2x^2+3x}$.

3°) a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(x+1)^2\,A(x)>0$.

b. Ranger alors dans l'ordre croissant les réels $A\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)$; $A\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $A\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)$.

Exercice 2 (3 pts)

1°) Etudier le signe de l'expression $-2x^2+3x+2$.

2°) Soit $A(x)=ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$ et $B(x)=(-2x^2+3x+2)A(x)$.

On donne le tableau suivant:

x	$-\infty$		-3		-2		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

a. Dresser le tableau de signe de $A(x)$.

b. Sachant que $B(-1)=-6$; déterminer l'expression de $A(x)$.

Exercice 3 (4.5 pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On donne les points $A(-3,-2)$, $A'(3,2)$, $B(-3,2)$ et $C(2,3)$.

Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC et I le milieu du segment [BC].

1°) a. Montrer que O est le centre de $\mathscr{C}$.

b. Vérifier que [AA'] est un diamètre de $\mathscr{C}$.

2°) Soit t la translation de vecteur $2\overrightarrow{OI}$ et $H=t(A)$.

a. Déterminer les coordonnées de H.

b. Vérifier que I est le milieu du segment [A'H].

c. Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

3°) Soit $E(1,8)$ et $\Delta=t((OA))$.

a. Montrer que $t(C)=E$.

b. Déterminer et construire Δ.

c. Les doites Δ et (AI) se coupeht en F.

Montrer que les droites (HE) et (EF) sont perpendiculaires

Exercice 4 (6.5 pts)

Soit ABCD un parallélogramme de centre O.

E le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, 2)$.

1°) Construire le point E.

2°) La droite (OE) coupe (DC) en G et (AD) en F.

a. Montrer que D est le milieu du segment [AF].

b. Montrer que F est le barycentre des points pondérés $(O, 4)$ et $(E, -3)$.

c. Soit $\mathscr{C} = \{M \in P \text{ tels que } \|4\overrightarrow{MO} - 3\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{FO}\| = \|\overrightarrow{ME} - \overrightarrow{MO}\|\}$.

Montrer que $\mathscr{C}$ est le cercle de diamètre [EG].

3°) Soit $f : P \longrightarrow P$

$$M \longmapsto M' \text{ tel que } \overrightarrow{CM'} = \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{MO}.$$

Montrer que f est la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$.

4°) a. Construire $E' = f(E)$.

b. Déterminer $f(F)$ et $f((CD))$.

5°) La droite (AB) coupe (CE') en H.

a. Montrer que H est le milieu du segment [CE'].

b. Déterminer et construire $\mathscr{C}' = f(\mathscr{C})$.

Devoir 2015

Ex1 1) a) $-2x^3+5x^2-3x \geq 0$

$x(-2x^2+5x-3) \geq 0$

Soit l'équation : $-2x^2+5x-3=0$

$a+b+c=0$, $x'=1$, $x''=\frac{3}{2}$

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-2x^2+5x-3$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
P		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty, 0] \cup [1, \frac{3}{2}]$.

b) $-2x^2|x| \geq 3|x| - 5x^2$

$-2|x|^3 - 3|x| + 5|x|^2 \geq 0$

on pose $t=|x| \geq 0$

$-2t^3+5t^2-3t \geq 0$

d'après a) $t \in]-\infty, 0] \cup [1, \frac{3}{2}]$

$t \geq 0$ donc $t=0$.

$t \in [1, \frac{3}{2}]$ donc $1 \leq t \leq \frac{3}{2}$

$t \geq 1$ et $t \leq \frac{3}{2}$

$|x| \geq 1$ et $|x| \leq \frac{3}{2}$

$x \geq 1$ ou $x \leq -1$ et $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$

donc $x \in [-\frac{3}{2}, -1] \cup [1, \frac{3}{2}]$.

$S_{\mathbb{R}} = [-\frac{3}{2}, -1] \cup \{0\} \cup [1, \frac{3}{2}]$

2) $A(x) = \frac{2x^2-x-1}{-2x^3+5x^2-3x}$

$A(x)$ a un sens lorsque $-2x^3+5x^2-3x \neq 0$.

$\boxed{D = \mathbb{R} - \{0, 1, \frac{3}{2}\}}$

b) Pour tout $x \in D$

$A(x) = \frac{2x^2-x-1}{x(-2x^2+5x-3)}$

Soit l'équation $2x^2-x-1=0$

$a+b+c=0$ donc $x'=1$, $x''=-\frac{1}{2}$

$2x^2-x-1 = 2(x-1)(x+\frac{1}{2})$

$= (x-1)(2x+1)$

$-2x^2+5x-3 = -2(x-1)(x-\frac{3}{2})$

$= (x-1)(-2x+3)$

d'où $A(x) = \frac{\cancel{(x-1)}(2x+1)}{x\cancel{(x-1)}(-2x+3)}$

$\boxed{A(x) = \frac{2x+1}{-2x^2+3x}}$

3) a) $(x+1)^2 A(x) > 0$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$(x+1)^2$		$+$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-2x^2+3x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
P		$+$	0	$+$	0	$-$	||	$+$	||	$-$	

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]0, \frac{3}{2}[\setminus \{-1, 1\}$

b) $A(-\frac{1}{2}) = 0$

$A(\sqrt{3}+\frac{3}{2}) < 0$ car $\sqrt{3}+\frac{3}{2} \in]\frac{3}{2}, +\infty[$

$-\frac{1}{2}-\sqrt{3} \in]-\infty, -\frac{1}{2}[$.

donc $A(-\frac{1}{2}-\sqrt{3}) > 0$.

d'où $A(\sqrt{3}+\frac{3}{2}) < A(-\frac{1}{2}) < A(-\frac{1}{2}-\sqrt{3})$

Ex2 1) Soit $c(x) = -2x^2+3x+2$

$\Delta = 25$, $x' = \frac{-3-5}{-4} = 2$

$x'' = \frac{-3+5}{-4} = -\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$c(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

si $x \in]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [2, +\infty[$ alors $c(x) \le 0$

si $x \in]-\frac{1}{2}, 2[$ alors $c(x) > 0$

2) $A(x) = ax^2+bx+c$ $(a \ne 0)$

$B(x) = (-2x^2+3x+2)A(x)$.

x	$-\infty$		-3		-2		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$-2x^2+3x+2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

a)

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
$A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$B(-1) = -6$.

$A(x) = a(x+3)(x+2)$.

$B(-1) = -6$ donc $(-2-3+2)A(-1) = -6$

$-3[A(-1)] = -6$.

$A(-1) = 2$.

$a(-1+3)(-1+2) = 2$.

$2a = 2$ donc $a = 1$.

$A(x) = (x+3)(x+2)$

$A(x) = x^2+3x+2x+6 = \boxed{x^2+5x+6}$

Ex3 $A(-3,-2)$; $A'(3,2)$; $B(-3,2)$ et $C(2,3)$

1) $OA = \sqrt{(-3)^2+(-2)^2} = \sqrt{13}$

$OB = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$

$OC = \sqrt{(-3)^2+2^2} = \sqrt{13}$

donc $OA = OB = OC$ d'où O est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC.

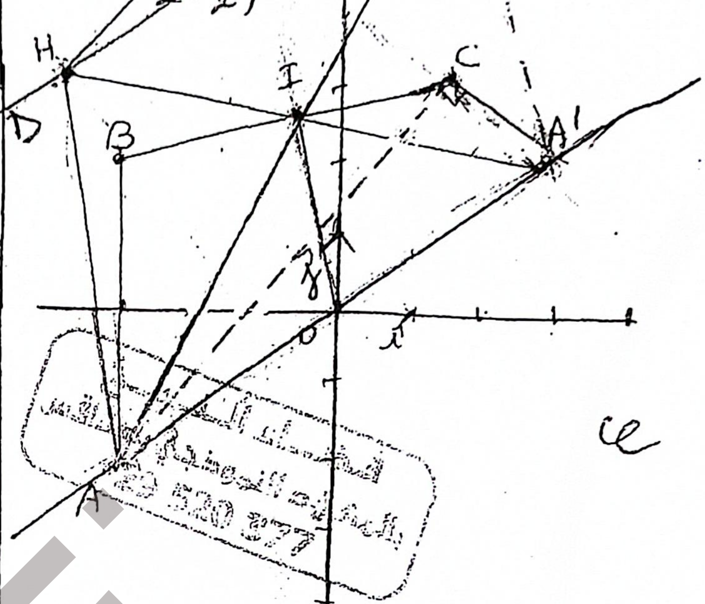
$OA' = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$ donc $A \in \mathscr{C}$

$x_A = -x_{A'}$, $y_A = -y_{A'}$ d'où O est le milieu de $[AA']$ ... $[AA']$ est un diamètre de $\mathscr{C}$

2) $t(A) = H$ donc $2\vec{OI} = \vec{AH}$

$x_I = \frac{x_B+x_C}{2} = -\frac{1}{2}$ $y_I = \frac{y_B+y_C}{2} = \frac{5}{2}$

$I(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$



a) $x_H - x_A = 2(-\frac{1}{2})$

$x_H + 3 = -1$ donc $x_H = -4$.

$y_H - y_A = 2 \times \frac{5}{2}$ donc $y_H + 2 = 5$

$y_H = 3$

$\boxed{H(-4,3)}$

b) $\frac{x_{A'}+x_H}{2} = \frac{3-4}{2} = -\frac{1}{2} = x_I$

$\frac{y_{A'}+y_H}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} = y_I$

d'où I est le milieu de $[A'H]$.

c) $\vec{BH}\binom{-1}{1}$ $\vec{AC}\binom{5}{5}$

$-1\times5+1\times5 = -5+5 = 0$ donc $\vec{BH} \perp \vec{AC}$

d'où $(BH) \perp (AC)$ (BH) porte la hauteur issue de B du triangle ABC

$\vec{AH}\binom{-1}{5}$ $\vec{BC}\binom{5}{1}$

$xx'+yy' = -5+5 = 0$ donc $\vec{AH} \perp \vec{BC}$

d'où $(AH) \perp (BC)$ donc (AH) porte la hauteur issue de A du triangle ABC

or $\{H\} = (AH) \cap (BH)$ donc H est l'orthocentre du triangle ABC.

Suite de la correction du devoir 2015 : Ex 3

3) $E(1,8)$ et $D = t((OA))$.

a) $\vec{CE}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ $\quad 2\vec{OI}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$

$\vec{CE} = 2\vec{OI}$ d'où $t(C) = E$

b) D est la droite parallèle à (OA) passant par $H = t(A)$.

$(AH) \parallel D$

c) Dans le triangle HIA on a :

$F \in (IA)$; $A' \in (IH)$ et $(FH) \parallel (AA')$

I milieu de $[A'H]$ donc $\vec{IA'} = -\vec{IH}$

D'après la forme vectorielle de Thalès

$\vec{IF} = -\vec{IA}$ d'où I milieu de $[AF]$

$[AF]$ et $[A'H]$ ont même milieu donc $\vec{AH} = \vec{A'F}$ or $\vec{AH} = 2\vec{OI}$

d'où $\vec{A'F} = 2\vec{OI}$

par suite $\boxed{t(A') = F}$

$[AA']$ est un diamètre de $\mathcal{C}$ et $C \in \mathcal{C}$

donc le triangle $AA'C$ est rectangle en C d'où

$(AC) \perp (A'C)$

d'où $t((AC)) \perp t((A'C))$

car la translation conserve l'orthogonalité

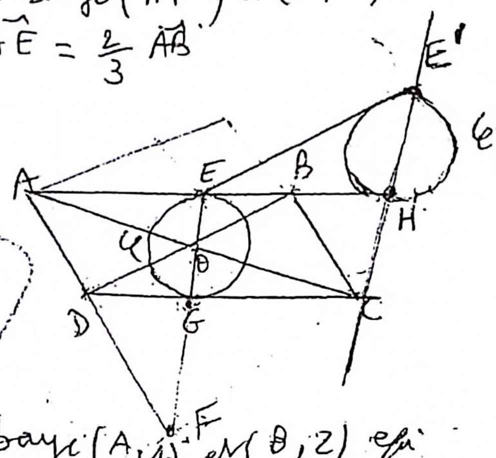
or $t((AC)) = (HE)$

$t((A'C)) = (FE)$.

par suite $(HE) \perp (EF)$.

Ex 4

1) E bary $(A,1)$ et $(B,2)$ équivaut $\vec{AE} = \frac{2}{3}\vec{AB}$



2) E bary $(A,1)$ et $(B,2)$ équivaut

$\vec{EA} + 2\vec{EB} = \vec{0}$

$\vec{EB} = -\frac{1}{2}\vec{EA} = \frac{1}{2}\vec{AE}$ (1)

Dans le triangle OEB on a :

$(EB) \parallel (DG)$; $G \in (OE)$

$D \in (OB)$ et $\vec{OB} = -\vec{OD}$

D'après la forme vect de Thalès

$\vec{OE} = -\vec{OG}$ et $\vec{EB} = \vec{DG}$ (2)

(1) et (2) donnent $\vec{AE} = 2\vec{DG}$

Dans le triangle AEF on a :

$G \in (EF)$ et $D \in (AF)$

et $(AE) \parallel (DG)$ D'après le théorème de Thalès $\frac{FG}{FE} = \boxed{\frac{FD}{FA}} = \frac{DG}{AE} = \frac{1}{2}$

$FA = 2FD$ et A, F et D sont alignés d'où D est le milieu de $[AF]$.

b) $FG = \frac{1}{2}FE$ et E, F et G alignés d'où G est le milieu de $[FE]$ et $\vec{OE} = -\vec{OG}$ d'où O est le milieu de $[EG]$

on a : $\vec{FE} = 2\vec{FG} = 2\vec{GE} = 4\vec{OE}$

$\vec{EF} = 4\vec{EO} = \frac{4}{4-3}\vec{EO}$

d'où F bary $(E,-3)$ et $(O,4)$

c) $\vec{ME} - \vec{MO} = \vec{OE}$

$4\vec{MO} - 3\vec{ME} = \vec{MF}$ car F barycentre de $(O,4)$ et $(E,-3)$.

$4\vec{MO} - 3\vec{ME} + \vec{FO} = \vec{MF} + \vec{FO} = \vec{MO}$

$M \in \mathscr{C}$ équivaut $\|\vec{MO}\| = \|\vec{OE}\|$

$MO = OE$

d'où $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon OE or O milieu de [EG] d'où $\mathscr{C}$ est le cercle de diamètre [EG]

3) $f(M) = M'$ équivaut $\vec{CM'} = \vec{MC} + 2\vec{CB} - 2\vec{MO}$

équivaut $\vec{CM'} = \vec{MC} + 2\vec{CB} - \vec{MB} - \vec{MD}$

$\vec{CM'} = \underline{\vec{MC} + \vec{CB}} + \vec{CB} - \vec{MB} - \vec{MD}$

$\vec{CM'} = \cancel{\vec{MB}} + \vec{CB} - \cancel{\vec{MB}} - \vec{MD}$

$\vec{CM'} - \vec{CB} = \vec{DM}$

$\vec{BM'} = \vec{DM}$

$\vec{MM'} = \vec{DB}$

$\left.\begin{array}{l} t_{\vec{DB}}(M) = M' \\ \text{or } f(M) = M' \end{array}\right\}$ d'où $f = t_{\vec{DB}}$

4) a) $f(E) = E'$ équivaut $\vec{EE'} = \vec{DB}$

5) on a $\vec{AD} = \vec{BC}$ or $\vec{AD} = \vec{DF}$

d'où $\vec{BC} = \vec{DF}$

donc $\vec{DB} = \vec{FC}$ par suite $f(F) = C$

$\left.\begin{array}{l} (CD) \parallel (AB). \\ D \in (CD) \\ B \in (AB) \\ f(D) = B \end{array}\right\}$ d'où $f((CD)) = (AB)$

5) a) $\{G\} = (EF) \cap (DC)$.

$\{f(G)\} = f((EF)) \cap f((DC))$.

$f((DC)) = (AB)$

$f(E) = E'$, $f(F) = C$

donc $f((EF)) = (E'C)$.

$\left.\right\} f(G) = (AB) \cap (E'C) = \{H\}$

d'où $\boxed{f(G) = H}$

milieu de $[EF]$

$f([EF]) = [E'C]$.

$f(G) = H$ d'où H est le milieu de $[E'C]$ car la translation conserve le milieu.

b) $\mathscr{C}$ est le cercle de diamètre [EG] or $f(E) = E'$

$f(G) = H$ d'où $\mathscr{C}'$ est le cercle de diamètre $[E'H]$.