Lycée Pilote Sfax	Devoir de synthèse n°1	$2^{ème}$ Sciences
2 Janvier 2017	Mathématiques	Durée : 2 H

9

Exercice n°1 : (4 points)

Soit P le polynôme défini par : $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

1) a- Vérifier que 2 est une racine de P puis factoriser P(x).

b- Résoudre dans IR : (i) $\sqrt{x-2}\,P(x) = 0$ (ii) $(x-3)P(x) \leq 0$

2) Résoudre dans IR l'inéquation suivante : $x^2|x| - 6 \leq 6x^2 - 11|x|$.

Exercice n°2 : (7 points)

Soit P le polynôme de degré 3 tels que : $P(1) = 1$, $P(2) = 3$, $P(0) = 3$ et $P(3) = -15$.

Soit Q le polynôme défini par : $Q(x) = P(x) - 2x + 1$.

1) a- Montrer que 1 et 2 sont deux racines de Q.

b- Factoriser alors $Q(x)$.

c- Vérifier que pour tout réel x, $P(x) = (2x-1)(-2x^2 + 6x - 3)$

2) Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2Q(x)}{2P(x)+3-6x}$

a- Déterminer D l'ensemble de définition de f.

b- Vérifier que pour tout x de D , $f(x) = \dfrac{4(x-1)(x-2)}{(2x-3)^2}$

c- Résoudre dans IR les inéquations suivantes : (i) $f(x) \leq 0$ (ii) $\dfrac{1}{f(x)} \leq \dfrac{4}{3}$

Exercice n°3 :(9points)

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que BC = 2AB.

On désigne par O et I et les milieux respectifs de [BC] et [AB].

1) Construire E barycentre des points pondérés (B, 3) et (C, 1).

2) Soit l'application f : $P \to P$

$$M \mapsto M' \ telque\ \overrightarrow{EM'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OE}.$$

Montrer que f est la translation de vecteur $\overrightarrow{BO}$.

3) a- Soit F l'image de A par f. Montrer que F est le barycentre de (A, 1), (E, 2) et (B, -2).

b- Les droites (OA) et (CI) se coupent en G. Montrer que G est le barycentre de (F, 1) et (E, 2).

4) Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC et $\mathscr{C}'$ son image par f.

a- Déterminer et construire $\mathscr{C}'$.

b- Montrer que F appartient à $\mathscr{C}$.

c- La perpendiculaire à (OA) passant par O recoupe $\mathscr{C}'$ en H. Montrer que f(F)=H.

5) Soit E' le projeté orthogonal de F sur (BC). Montrer que E' = f(E).

6) Soit $\mathscr{E} = \{ M \in P \ tel\ que\ 2\|\overrightarrow{M'F} + 2\overrightarrow{M'E'} - 2\overrightarrow{M'O}\| = \|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}\| \text{ où } M' = f(M) \}$.

a- Vérifier que A$\in \mathscr{E}$.

b- Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$

Correction du devoir de synthese

2 janvier 2017

Ex1 $P(x)=x^3-6x^2+11x-6$

1) a) $P(2)=2^3-6\times2^2+11\times2-6$

$=8-24+22-6=30-30=0$

donc 2 est une racine de P

$P(x)=(x-2)Q(x)$ $\quad d°(P)=3$

donc $d°(Q)=2$ d'où $Q(x)=ax^2+bx+c$

$P(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$

$=ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c$

$=ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$

par identification $\begin{cases}a=1\\ b-2a=-6\\ c-2b=11\\ -2c=-6\end{cases}$ ⇔ $\begin{cases}c=3\\ a=1\\ b=-4\end{cases}$

donc pour tout $x\in\mathbb{R}$

$P(x)=(x-2)(x^2-4x+3)$

b) i) $\sqrt{x-2}\;P(x)=0$

condition: $x-2\geq0$ ⇔ $x\geq2$

donc $x\in[2,+\infty[$

$\sqrt{x-2}=0$; $P(x)=0$

$x-2=0$ $\quad (x-2)(x^2-4x+3)=0$

$x=2$ $\quad x-2=0$ ou $x^2-4x+3=0$

$x=2$ $\quad a+b+c=0$; $x'=1$; $x''=3$

$S_{\mathbb{R}}=\{2,3\}$

ii) $(x-3)P(x)\leq0$

x	$-\infty$	1		2		3	$+\infty$
$x-2$	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$
x^2-4x+3	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$
$x-3$	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$
P	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

$S_{\mathbb{R}}=[1,2]\cup\{3\}$.

2) on pose $t=|x|\geq0$

$t^3-6\leq6t^2-11t$

$t^3-6t^2+11t-6\leq0$

d'où $P(t)\leq0$

t	$-\infty$	1		2		3	$+\infty$
$t-2$	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$
t^2-4t+3	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$
$P(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$t\in]-\infty,1]\cup[2,3]$.

$0\leq t\leq1$ ou $2\leq t\leq3$

$0\leq|x|\leq1$ ou $2\leq|x|\leq3$

$-1\leq x\leq1$ ou $2\leq x\leq3$ ou $2\leq-x\leq3$

$x\in[-1,1]$ ou $x\in[2,3]$ ou $x\in[-3,-2]$

$S_{\mathbb{R}}=[-3,-2]\cup[-1,1]\cup[2,3]$

Ex2 $d°(P)=3$; $P(1)=1$; $P(2)=3$

$P(0)=3$ et $P(3)=-15$

$Q(x)=P(x)-2x+1$.

1) a) $Q(1)=P(1)-2+1=1-2+1=0$

$Q(2)=P(2)-2\times2+1=3-4+1=0$

donc 1 et 2 sont des racines de Q.

b) $Q(x)=(x-1)(x-2)R(x)$.

$d°(P)=3$ donc $d°(Q)=3$.

d'où $d°(R)=1$.

$Q(x)=(x-1)(x-2)(ax+b)$

$Q(x)=(x^2-3x+2)(ax+b)$

$Q(0)=P(0)-2\times0+1=4$

donc $2b=4$ par suite $\boxed{b=2}$

$Q(3)=P(3)-2\times3+1=-15-6+1=-20$

$(3-1)(3-2)(3a+2)=-20$

$(2\times1)(3a+2)=-20$

$3a+2=-10$ donc $3a=-12$

$a=-4$.

$Q(x)=(x-1)(x-2)(-4x+2)$

c) $Q(x)=(x^2-3x+2)(-4x+2)$

$Q(x)=2(x^2-3x+2)(1-2x)$.

$P(x)=Q(x)+2x-1$.

$=(2x-1)+(2x-1)(-2x^2+6x-4)$

d'où $\boxed{P(x)=(2x-1)(-2x^2+6x-3)}$

2) $f(x)=\dfrac{2Q(x)}{2P(x)+3-6x}$

a) $x\in D \Leftrightarrow 2P(x)+3(1-2x)\neq 0$

$2(2x-1)(-2x^2+6x-3)+3(1-2x)\neq 0$

$(2x-1)(-4x^2+12x-6-3)\neq 0$

$2x-1\neq 0$ et $-4x^2+12x-9\neq 0$

$x\neq\frac12$ et $-(2x-3)^2\neq 0$

$2x-3\neq 0$

$x\neq\frac32$

$\boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{\frac12,\frac32\}}$

b) Pour tout $x\in D$

$f(x)=\dfrac{2(x-1)(x-2)(-4x+2)}{-(2x-1)(2x-3)^2}$

$f(x)=\dfrac{-4(x-1)(x-2)\cancel{(2x-1)}}{-\cancel{(2x-1)}(2x-3)^2}$

$\boxed{f(x)=\dfrac{4(x-1)(x-2)}{(2x-3)^2}}$

c) i) $x\in D$ $f(x)\le 0$

x	$-\infty$	1		$3/2$		2	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$
$x-2$	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$
$(2x-3)^2$	$+$	|	$+$	0	$+$	|	$+$
Q	$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$

$S_{\mathbb{R}}=[1,\frac32[\cup]\frac32,2]$

ii) $\dfrac{1}{f(x)}\le\dfrac43$

$\dfrac{1}{\frac{2Q(x)}{2P(x)+3-6x}}\le\dfrac43$

Condition : $Q(x)\neq 0$ et $\underbrace{2P(x)+3-6x\neq 0}_{x\in D}$

$x\neq 1$ et $x\neq 2$ et $x\neq\frac12$

d'où $x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2,\frac12,\frac32\}$

$\dfrac{1}{\frac{4(x-1)(x-2)}{(2x-3)^2}}\le\dfrac43$

$\dfrac{(2x-3)^2}{4(x-1)(x-2)}-\dfrac43\le 0$

$\dfrac{3(2x-3)^2-16(x-1)(x-2)}{12(x-1)(x-2)}\le 0$

$\dfrac{3(4x^2-12x+9)-16(x^2-3x+2)}{12(x-1)(x-2)}\le 0$

$\dfrac{12x^2-36x+27-16x^2+48x-32}{12(x-1)(x-2)}\le 0$

$\dfrac{-4x^2+12x-5}{12(x-1)(x-2)}\le 0$

Soit l'équation : $-4x^2+12x-5=0$

$\Delta=144-80=64$

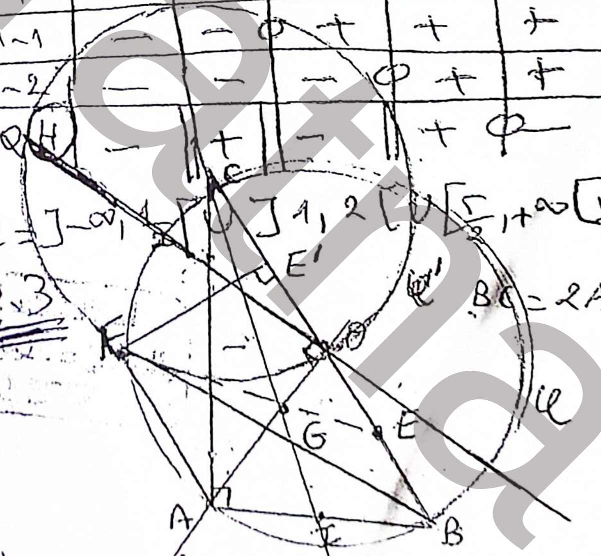
$x'=\dfrac{-12-8}{-8}=\dfrac{20}{8}=\dfrac52$

$x''=\dfrac{-12+8}{-8}=\dfrac12$

x	$-\infty$	$1/2$		1		2		$5/2$	$+\infty$
$-4x^2+12x-5$	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$
$x-1$	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$
$x-2$	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$
	$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	0	$-$

$S_{\mathbb{R}}=]-\infty,\frac12]\cup]1,2[\cup[\frac52,+\infty[\setminus\{\frac32\}$

Ex 3



1) E barycentre $(B,3)$ et $(C,1)$ d'où $\vec{BE}=\frac14\vec{BC}$

2) $f(M)=M'$ d'où $\vec{EM'}=\vec{BC}+\vec{OM}+\vec{OE}$

$\Leftrightarrow \vec{EO}+\vec{OM'}-\vec{OM}=\vec{BC}+\vec{OE}$

$\Leftrightarrow \vec{MM'}=\vec{BC}+2\vec{OE}=2\vec{BO}+2\vec{OE}$

Suite de l'ex 3 — 2 janvier 2017

2) $\vec{MM'} = 2\vec{BE} = \frac{1}{2}\vec{BC} = \vec{BO}$ d'où M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{BO}$ d'où $t_{\vec{BO}}(M) = M'$ or $f(M) = M'$

d'où $f = t_{\vec{BO}}$

3) a) $f(A) = F$ éq $\vec{AF} = \vec{BO}$ donc $\vec{AF} = 2\vec{BE}$ éq $\vec{AF} = 2\vec{BF} + 2\vec{FE}$

éq $2\vec{FE} + \vec{FA} - 2\vec{FB} = \vec{0}$ d'où F est le barycentre (A,1) ; (B,−2) et (E,2)

b) E bary (B,3) et (C,1) et $G \in P$

d'où $3\vec{GB} + \vec{GC} = 4\vec{GE}$

F bary (A,1) ; (B,−2) et (E,2)

et $G \in P$ donc $\vec{GA} - 2\vec{GB} + 2\vec{GE} = \vec{GF}$

On additionne membre à membre

$\vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GA} + 2\vec{GE} = 4\vec{GE} + \vec{GF}$

$\vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GA} = 2\vec{GE} + \vec{GF}$

or $\{G\} = (AO) \cap (CI)$

[AO] et [CI] sont deux médianes du triangle ABC d'où G est le centre de gravité du triangle ABC

donc $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

par suite $2\vec{GE} + \vec{GF} = \vec{0}$ donc

G bary (E, 2) et (F, 1)

4) a) ABC est un triangle rectangle en A dont O est le milieu de l'hypoténuse [BC] d'où O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

$\mathcal{C}' = f(\mathcal{C})$ est le cercle de centre

$C = t_{\vec{BO}}(O)$ car O milieu de [BC]

$\vec{BO} = \vec{OC}$

et de même rayon OC.

b) $f(A) = F$ éq $\vec{AF} = \vec{BO}$

éq $\vec{OF} = \vec{BA}$ alors $OF = BA$

or $BA = \frac{1}{2} BC = OC$ donc $OF = OC$

d'où $\boxed{F \in \mathcal{C}}$

c) on a $(OA) \perp (OH)$ (1)

$\vec{AF} = \vec{BO}$ et A, O et B non alignés

donc ABOF est un parallélogramme

or $AB = \frac{1}{2} BC = BO$

donc ABOF est un losange

d'où $(BF) \perp (OA)$ (2)

(1) et (2) donnent $(BF) \parallel (OH)$

or $f(B) = O$ donc

$f((BF)) = (OH)$

$F \in (BF) \cap \mathcal{C}$ d'où $f(F) \in f((BF)) \cap f(\mathcal{C})$

d'où $f(F) \in (OH) \cap \mathcal{C}'$

$\in \{O, H\}$

or $O = f(B)$

d'où $\boxed{f(F) = H}$

5) $(FE') \perp (BC)$ (3)

on a $AO = \frac{1}{2} BC = AB$

donc le triangle AOB est isocèle en A

et $\vec{BE} = \frac{1}{4}\vec{BC} = \frac{1}{2}\vec{BO}$ donc E est le milieu de [BO] d'où $(AE) \perp (OB)$

$(AE) \perp (BC)$ (4)

(3) et (4) donnent $(AE) \parallel (FE')$

or $f(A) = F$ d'où $f((AE)) = (FE')$

$\{E\} = (AE) \cap (OB)$

$\{f(E)\} = f((AE)) \cap f((OB))$

$= (FE') \cap (OB) = \{E'\}$

d'où $f(E) = E'$

$f((OB)) = (OB)$ car $\vec{BO}$ est le vecteur de la translation

6) $f(M) = M'$, $f(A) = F$, $f(B) = O$ et $f(E) = E'$ d'où

$\vec{M'F} = \vec{MA}$, $\vec{M'E'} = \vec{ME}$

et $M'O = MB'$

a) $M \in \mathcal{E}$ équivaut $2\|\vec{MA} + 2\vec{ME} - 2\vec{MB}\| = \|\vec{MC} + \vec{MB}\|$

Soit $M = A$. $2\|\cancel{\vec{AA}} + 2\vec{AE} - 2\vec{AB}\| = 2\|2\vec{BE}\| = 4BE$

$\|\vec{AE} + \vec{AB}\| = \|2\vec{AO}\| = 2AO$ car O milieu de [B...

or $AO = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 4BE = 2BE$

d'où $2AO = 4BE$ par suite $A \in \mathcal{E}$

b) $M \in \mathcal{E}$ équi $2\|\vec{MF}\| = \|2\vec{MO}\|$

$\cancel{2}MF = \cancel{2}MO$

$\mathcal{E}$ est la médiatrice de $[OF]$