Lycée Pilote F-H Sfax	Devoir de Synthèse N°2	Durée 2 heures
$2^{\text{ème}}$ année Sciences	Année scolaire : 2019 - 2020	

Exercice 1 :(5 pts)

Soit (u_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ de raison 4 telle que $u_7 - u_3 = 16320$.

1°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{2n}$.

2°) Soit $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$, $n \in \mathbb{N}$.

a. Exprimer S_n en fonction de n.

b. Déterminer alors le reste de la division euclidienne de 4^{n+1} par 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

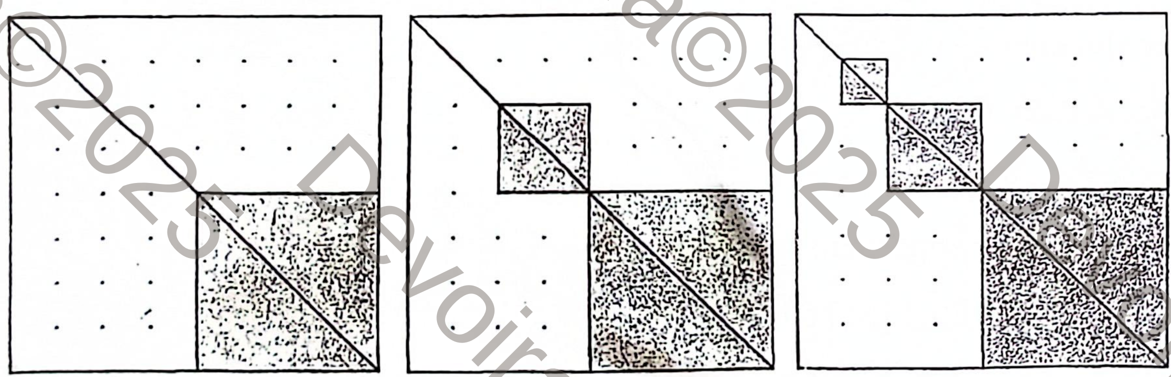
c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n et u_n sont premiers entre eux.

3°) a. Calculer la somme $S = 4^2 + 4^3 + 4^4 \ldots + 4^{12} + 4^{13}$.

b. Déduire alors la somme $S' = 4^2 + 4^4 + 4^6 \ldots + 4^{10} + 4^{12}$.

Exercice 2 :(4 pts)

A l'intérieur d'un carré de côté 1, on effectue le coloriage schématisé ci –dessous.



Etape 1 Etape 2 Etape 3

On désigne par a_n l'aire du domaine colorié après le coloriage du $n^{\text{ème}}$ carré.

1°) calculer les quatre premiers termes de la suite (a_n)

2°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$ en fonction de n.

3°) a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{4} \leq a_n < \frac{1}{3}$.

b. A partir de quel entier naturel non nul n , a-t-on $a_n \geq 0.33$?

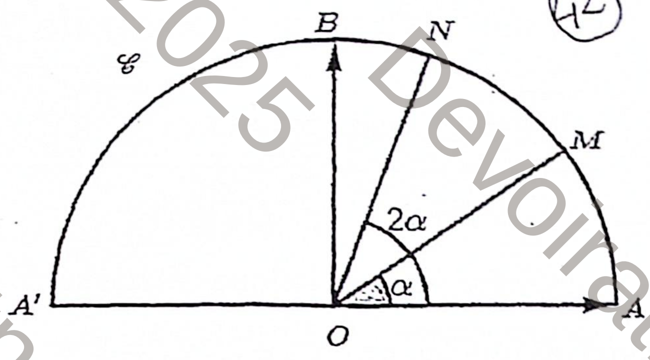
Exercice 3 :(6.5 pts)

Dans la figure ci-contre :

$\mathscr{C}$ est le demi-cercle de centre O ,

de diamètre $[AA']$ et passant par B

où $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est un repère orthonormé.



M et N sont deux points de $\mathscr{C}$ tels que :

$\widehat{AOM} = \alpha$, $\widehat{AON} = 2\alpha$ et $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Soit I le milieu de [AN].

1°) Déterminer en fonction de α les coordonnées des points M , N et I.

2°) a. Montrer que les points O , I et M sont alignés.

b. Montrer alors que $\tan\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$.

c. Déduire les valeurs exactes de $\tan\frac{\pi}{8}$ et $\cos\frac{\pi}{8}$.

d. Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation: $\tan^4 x - (4-2\sqrt{2})\tan^2 x + 3 - 2\sqrt{2} = 0$.

3°) Soit E le point de coordonnées $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$.

a. Montrer que $E \in \mathscr{C}$ et que le triangle OME est rectangle en O.

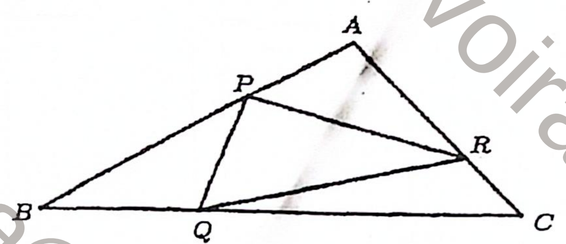
b. Justifier que $\widehat{AOE} = \frac{\pi}{2} + \alpha$.

c. Montrer alors que $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$ et que $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$.

d. Calculer alors $\sin\frac{5\pi}{8}$ et $\cos\frac{5\pi}{8}$.

Exercice 4 :(4 .5 pts)

ABC est un triangle . BC = a, AB = c et AC = b.



P , Q et R sont des points appartenant

respectivement à [AB], [BC] et [AC] tels que:

$\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{BQ}{BC} = \dfrac{CR}{CA} = x$.

1°) Montrer que l'aire du triangle APR est : $\frac{1}{2}x(1-x)bc\sin\hat{A}$.

2°) Calculer de même les aires des triangles CQR et BPQ et montrer que les triangles APR, CQR et BPQ ont la même aire.

3°) Calculer l'aire du triangle PQR en fonction de x.

4°) a. Ecrire le trinôme $3x^2 - 3x + 1$ sous forme canonique.

b. Comment choisir x pour que cette aire soit minimale?

Lycée Pilote Sfax 1 — Devoir de Synthèse n°2 — Mathématiques

(3)

Exercice 1 :

1) soit $u_7 - u_3 = 16320$

$u_0 \cdot 4^7 - u_0 \cdot 4^3 = 16320$

$u_0 = \frac{16320}{4^7 - 4^3}$ Donc $u_0 = 1$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \cdot 4^n$

$u_n = 2^{2n}$

2) a) $S_n = u_0 \cdot \frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1}$ $(q = 4 \neq 1)$

Donc $S_n = \frac{4^{n+1} - 1}{3}$; $(u_0 = 1)$

b) $S_n = \frac{4^{n+1} - 1}{3}$ Donc $4^{n+1} = 3S_n + 1$

Comme $u_n = 4^n \in \mathbb{N}$ et $S_n \in \mathbb{N}$ Alors 1 est le reste de la Division euclidienne de 4^{n+1} par 3

c) $4^{n+1} = 3S_n + 1$

$4 \cdot u_n = 3S_n + 1$

soit $d = PGCD(u_n ; S_n)$

Donc $\left.\begin{array}{l} d \text{ divise } u_n \\ d \text{ divise } S_n \end{array}\right\}$ Donc d divise $4u_n - 3S_n$

Alors d divise 1 d'où $d = 1$

par suite S_n et u_n sont premiers entre eux, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) a) $S = 4^2 + 4^3 + 4^4 + \dots + 4^{12} + 4^{13}$

$= u_2 + u_3 + \dots + u_{12} + u_{13}$; $(4^n = u_n)$

$= u_2 \cdot \frac{4^{12} - 1}{4 - 1}$; $(u_2 = 16)$

Donc $S = 89478480$

b) $4S' = 4^3 + 4^5 + 4^7 + \dots + 4^{11} + 4^{13}$

Donc $S' + 4S' = (4^2 + 4^4 + 4^6 + \dots + 4^{10} + 4^{12}) + (4^3 + 4^5 + 4^7 + \dots + 4^{11} + 4^{13})$

Alors $5S' = S$

D'où $S' = \frac{1}{5} S$ par suite $S' = 17895696$

Exercice 2 :

1) $a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{16}$

$a_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{21}{64}$

$a_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{16}\right)^2 = \frac{85}{256}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n$

Donc a_n est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ de premier terme $\frac{1}{4}$

Donc $a_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}}$

D'où $a_n = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

3) a) $a_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n < \frac{1}{3}$ car $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n > 0$

$n \in \mathbb{N}^*$ Donc $4^n \geq 4$ Alors $\left(\frac{1}{4}\right)^n \leq \frac{1}{4}$

Donc $1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \geq \frac{3}{4}$

D'où $\frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}$ Par suite $a_n \geq \frac{1}{4}$

et $\frac{1}{4} \leq a_n < \frac{1}{3}$

b) $a_n \geq 0{,}33$ équivaut à $\frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \geq 0{,}33$

$1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \geq 0{,}99$ Donc $\left(\frac{1}{4}\right)^n \leq 10^{-2}$

Soit donc $4^n \geq 10^2$

on a $4^3 = 64 < 10^2$ et $4^4 = 256 > 10^2$

Donc à partir de $n = 4$, $a_n \geq 0{,}33$

45

Exercice 3 :

1) $M \in \mathcal{C}$ et $\widehat{AOM} = \alpha$ Donc $M(\cos\alpha \, ; \sin\alpha)$

$N \in \mathcal{C}$ et $\widehat{AON} = 2\alpha$ Donc $N(\cos 2\alpha \, ; \sin 2\alpha)$

I milieu de $[MN]$ Donc $I\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2} \, ; \frac{\sin 2\alpha}{2}\right)$; $A(1;0)$

2) a) $\widehat{AOM}$ et $\widehat{MON}$ sont adjacents tel que

$\widehat{AOM} = \frac{1}{2}\widehat{AON}$ donc $[OM)$ est la bissectrice de $\widehat{AON}$

Comme $OA = ON$ et I le milieu de $[MN]$ Alors

$[OI)$ est aussi la bissectrice de $\widehat{AON}$ Donc O, I et M sont alignés ; ($[OM)$ et $[OI)$ confondues)

b) O, I et M sont alignés

équivaut $\vec{OI}$ et $\vec{OM}$ sont colinéaires

équivaut $\begin{vmatrix} \frac{1+\cos 2\alpha}{2} & \cos\alpha \\ \frac{\sin 2\alpha}{2} & \sin\alpha \end{vmatrix} = 0$

équivaut : $\sin\alpha\,(1+\cos 2\alpha) = \cos\alpha \cdot \sin 2\alpha$

équivaut : $\tan\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$; $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$; $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

c) $\frac{\pi}{8} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ Donc $\tan\frac{\pi}{8} = \frac{\sin 2\frac{\pi}{8}}{1+\cos 2\frac{\pi}{8}}$

Alors $\tan\frac{\pi}{8} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}$ Donc $\tan\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$

$1+\tan^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{8}}$ Donc $\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1+(\sqrt{2}-1)^2}$

$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ Donc $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; $\left(\cos\frac{\pi}{8} > 0\right)$

YAMAMA
HIGH QUALITY

le, ...

46

d) On pose $t = \tan^2 x$, $(t \in \mathbb{R}_+)$

L'équation proposée est équivalente à

$$t^2 - (4 - 2\sqrt{2})\,t + 3 - 2\sqrt{2} = 0$$

$a = 1$

$b = -(4 - 2\sqrt{2})$; $a + b + c = 0$ Donc

$c = 3 - 2\sqrt{2}$; $t = 1$ ou $t = 3 - 2\sqrt{2}$

Donc $\tan^2 x = 1$ ou $\tan^2 x = (\sqrt{2} - 1)^2$

$\tan x = 1$ ou $\tan x = -1$ ou $\tan x = \sqrt{2} - 1$ ou $\tan x = 1 - \sqrt{2}$

$x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{\pi}{8}$ ou $x = \frac{7\pi}{8}$

$$S_{[0;\pi]} = \left\{\frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4} ; \frac{\pi}{8} ; \frac{7\pi}{8}\right\}$$

3) a) • $OE = \sqrt{(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2} = \sqrt{1} = 1$

Comme $y_E = \cos\alpha > 0$ car $\alpha \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ Donc $E \in \mathcal{C}$

• $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{ON}\begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$

$aa' + bb' = \cos\alpha \cdot (-\sin\alpha) + \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0$

Donc $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{ON}$ par suite OME est un triangle rectangle en O (et isocèle)

b) OME est un triangle rectangle en O Donc

$\widehat{MOE} = \frac{\pi}{2}$, $\widehat{AOM}$ et $\widehat{MOE}$ sont adjacents

Comme $\widehat{AOM} = \alpha$ Alors $\widehat{AOE} = \frac{\pi}{2} + \alpha$.

c) $E \in \mathcal{C}$ et $\widehat{AOE} = \frac{\pi}{2} + \alpha$ Alors $E\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) ; \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)$

or $E(-\sin\alpha ; \cos\alpha)$ Alors

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$.

d) $\sin\frac{5\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{8}$; $\frac{\pi}{8} \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$

$\cos\frac{5\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = -\sin\frac{\pi}{8}$

le, ...

$\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ et $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Donc $\sin\frac{\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{8}\cdot\tan\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Alors $\sin\frac{5\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\cos\frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{8}$

Exercice 4 :

1) Soit S l'aire du triangle APR

$S = \frac{1}{2} AP \cdot AR \cdot \sin P\hat{A}R$

$= \frac{1}{2} AP(AC - CR)\sin B\hat{A}C$; $(P \in [AB],\ R \in [AC])$

$S = \frac{1}{2} x(1-x)\, b\, c \sin\hat{A}$, $\begin{pmatrix} AP = x\,AB \\ CR = x\,AC \end{pmatrix}$

Soit S' l'aire de CQR et S'' l'aire de BPQ

$S' = \frac{1}{2} CQ \cdot CR \cdot \sin Q\hat{C}R$

$= \frac{1}{2}(BC - BQ)\cdot CR \sin B\hat{C}A$; ( )

$= \frac{1}{2} x(1-x)\, a\, b \sin\hat{C}$

de même $S'' = \frac{1}{2} x(1-x)\, a c \sin\hat{B}$.

On appliquons la loi des sinus dans ABC :

$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$ Donc $a\sin\hat{B} = b\sin\hat{A}$

$b\sin\hat{C} = c\sin\hat{B}$

Nous déduisons $ab\sin\hat{C} = ac\sin\hat{B} = cb\sin\hat{A}$

Donc $S = S' = S''$ et les triangles APR, CQR et BPQ ont la même aire

3) L'aire $\mathcal{A}$ du triangle PQR est

$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{ABC} - 3S$;

$= \frac{1}{2} cb\sin\hat{A} - 3\cdot\frac{1}{2}x(1-x)\, bc\sin\hat{A}$

$\mathcal{A} = \frac{1}{2} bc\sin\hat{A}\,(1 - 3x + 3x^2)$.

le,......................................

4) a) $3x^2 - 3x + 1 = 3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$. (4/8)

b) L'aire $\mathcal{A}$ du triangle PQR est minimale lorsque $3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$ $\left(\text{car} \geq \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{4}\right)$

soit pour la valeur de $x = \frac{1}{2}$

Correspondant à P, Q et R les milieux respectifs de [AB], [BC] et [AC]