Lycée Pilote Sfax	Devoir de Synthèse N°: 2 Mathématiques	2 sciences-2-5-6-7-8-9 Durée 2 h

Exercice 1 : (6,5 points)

Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique telle que $U_1 + U_4 = 8$ et $U_2 + U_5 = 12$

1) a) Déterminer la raison de la suite (U_n) puis montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = 2n - 1$

b) Soit la somme $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$. Exprimer S_n en fonction de n

c) En déduire l'entier naturel n tel que $3 + 5 + 7 + \dots + (2n+1) = 143$

2) Soit (V_n) une suite réelle définie sur IN par $V_n = (\frac{1}{\sqrt{2}})^{1+U_n}$

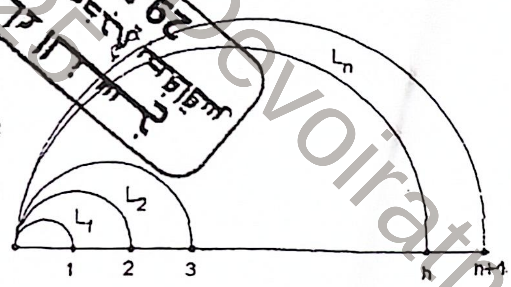
a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

b) Soit $T_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ ($n \in IN$) . Exprimer T_n en fonction de n puis déterminer n tel que $T_n = \frac{127}{64}$

c) Montrer que $T_0 + T_1 + T_2 + \dots + T_n = 2n + \frac{1}{2^n}$

Exercice 2 : (2,5 points)

Pour tout entier naturel n supérieur où égal à 1 , L_n est l'aire de la partie comprise entre deux demi –cercles. (Voir figure)



1) Calculer L_1

2) a) Montrer que pour tout n supérieur où égal à 1 , $L_n = \frac{\pi}{4} n + \frac{\pi}{8}$

b) Montrer que $(L_n)_{n\geq 1}$ est une suite arithmétique .

3) A l'intérieur du demi - cercle de diamètre 20 , on colore en bleue les zones correspondant aux termes d'indices impairs (L_1 , L_3 , L_5 ………) et en rouge celles correspondant aux termes d'indices pairs (L_2 , L_4 , L_6 ……). On désigne par A_1 l'aire totale des zones bleues et par A_2 l'aire totale des zones rouges , montrer que $A_1 - A_2 = \frac{21\pi}{8}$

Exercice 3 : (4 points .)

ABDC est un losange direct tel que ABC est un triangle équilatéral .
et r la rotation directe de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1)a) Déterminer r(B)

b) Construire le point E = r(D)

c) Soit Δ la parallèle à (AC) passant par E , montrer que r((DC)) = Δ

2) a) Soit F = r(C) , montrer que C est le milieu du segment $[DF]$

b) Δ coupe (AB) en I , montrer que r(F) = I et que F est le milieu de $[IE]$

3) Montrer que les points B , C et E sont alignés, en déduire la nature du triangle IBE .

(3A)

Exercice N°4 : (7 points)

Dans la figure ci-contre $\mathcal{C}$ est le demi cercle trigonométrique de centre O de diamètre $[AA']$ et passant par B où (O , $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$) est un repère orthonormé . M et N sont deux points de $\mathcal{C}$ tels que $\widehat{AOM}$ = a et $\widehat{MON}$ = b , a et b sont deux réels de $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$. On désigne par H et K les projetés orthogonaux de N respectivement sur (OA) et (OM) et par P le point d'intersection de (NH) et (OM).

1) a) Exprimer OK , NK et OH en fonction de a et b .

b) Montrer que $\widehat{PNK} = a$

2) Soit R et Q les projetés orthogonaux de K respectivement sur (OA) et (NH)

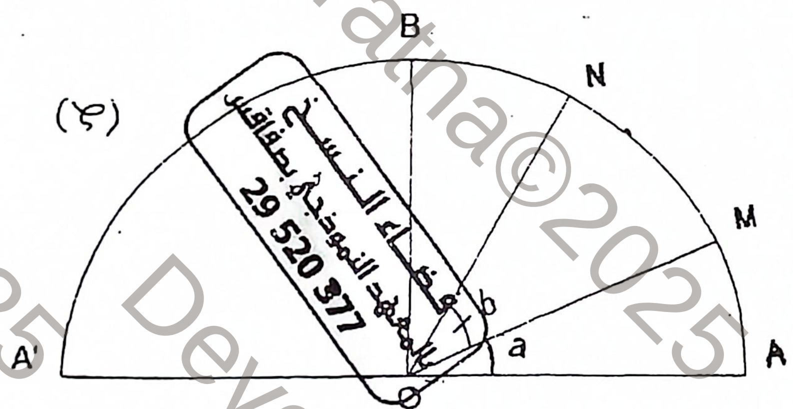
a) Montrer que OR = cos a . cos b et que QK = sin a . sin b

b) Déduire alors que cos (a+b) = cos a cos b – sin a sin b

c) En remarquant que $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{12}$, déterminer la valeur exacte de cos ($\frac{5\pi}{12}$) puis sin ($\frac{11\pi}{12}$)

3) a) Montrer que cos (2a) = 1 – 2 $\sin^2$ a

b) Déduire la valeur exacte de sin $\frac{\pi}{8}$ et tan $\frac{\pi}{8}$.



Ex 1) $f(x) = (x+1)^2 - 1$

C_f est une parabole de sommet $S(-1,-1)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = -1$

x	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	0	3	8

$g(x) = \frac{x}{x+2}$ $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

C_g est une hyperbole de centre de symétrie $I(-2,1)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x=-2$ et $y=1$

x	-2	-3	-1	0	2
$g(x)$	X	-3	-1	0	$\frac{1}{2}$

2/a) Les abscisses des pts d'intersection de C_f et C_g sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$

$(x+1)^2 - 1 = \frac{x}{x+2}$ $(x \neq -2)$

$(x^2+2x)(x+2) - x = 0$

$x^3 + 4x^2 + 3x = 0$

$x(x^2+4x+3) = 0$

$x = 0$ ou $x^2+4x+3 = 0$

$a - b + c = 0$

$x' = -1$ $x'' = -3$

les abscisses sont -3, -1 et 0

b) $|f(x) - g(x)| = g(x) - f(x)$

équi $f(x) - g(x) \leq 0$

$f(x) \leq g(x)$

les solutions de cette inéquation sont les abscisses des pts de C_f situés au dessous ou sur C_g

$S_{\mathbb{R}} = [-3,-2[\cup [-1,0]$

* $x+2 > \frac{1}{x+2}$

1er cas si $x = 0$ alors $0 > \frac{1}{2}$ (faux)

donc 0 n'est une solution de l'inéquation

2e cas si $x > 0$ alors $x(x+2) > \frac{x}{x+2}$

$x^2 + 2x > \frac{x}{x+2}$ donc $f(x) > g(x)$

sur $]0,+\infty[$, les solutions de cette inéquation sont les abscisses des pts de C_f situés au dessus de C_g

$S_1 =]0,+\infty[$

3e cas si $x < 0$ alors $x(x+2) < \frac{x}{x+2}$

$f(x) < g(x)$

sur $]-\infty,0[$, les solutions de cette inéquation sont les abscisses des pts de C_f situés au dessous de C_g

$S_2 =]-3,-2[\cup]-1,0[$

$S_{\mathbb{R}} = S_1 \cup S_2 \cup \{0\}$

$=]-3,-2[\cup]-1,+\infty[$

3) $h(x) = \frac{-x}{|x|-2}$

a) $D_h = \{x \in \mathbb{R}, |x| - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2,2\}$

si $x \in D_h$ alors $|x| \neq 2$ alors $|x| = |-x|$

d'où $|-x| \neq 2$ donc $-x \in D_h$

$h(-x) = \frac{x}{|-x|-2} = \frac{-(-x)}{|x|-2} = -h(x)$

donc h est impaire

b) Soit C_1 la partie de C_g relative à $\mathbb{R}^- \setminus \{-2\}$

alors $h(x) = g(x)$ or h est impaire

donc $C_h = C_1 \cup S_O(C_1)$

4) $D : x - y + 1 = 0$

a) Les abscisses des pts d'intersection de C_f et D sont les solutions de l'équation $h(x) = x+1$ $(x \neq -2$ et $x \neq 2)$

1er cas si $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{2\}$.

$\frac{x}{2-x} = x+1$ donc $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$ à rejeter

2ème cas : Si $x \in \mathbb{R}^- \setminus \{-2\}$

$\frac{x}{x+2} \geq x+1$.

$x^2+2x+2=0 \quad \Delta<0$.

donc $-\sqrt{2}$ est la seule abscisse

b) $\frac{x}{2-|x|} \geq x+1$.

$\frac{-x}{-(2-|x|)} \geq x+1$

$\frac{-x}{|x|-2} \geq x+1$.

$h(x) \geq x+1$

les solutions de cette inéquation sont les abscisses des pts de C_h situés au dessus de (D).

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty,-2[\cup [\sqrt{2},2[$

5) $C(0,-1)$

$CM^2 = x^2+(y+1)^2 = x^2+y^2+2y+1$

$MH = d(M,D) = \frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}}$

$MH^2 = \frac{(x-y+1)^2}{2} = \frac{x^2+y^2+1+2x-2y-2xy}{2}$

$MC^2 - 2MH^2 = 0$ équivaut

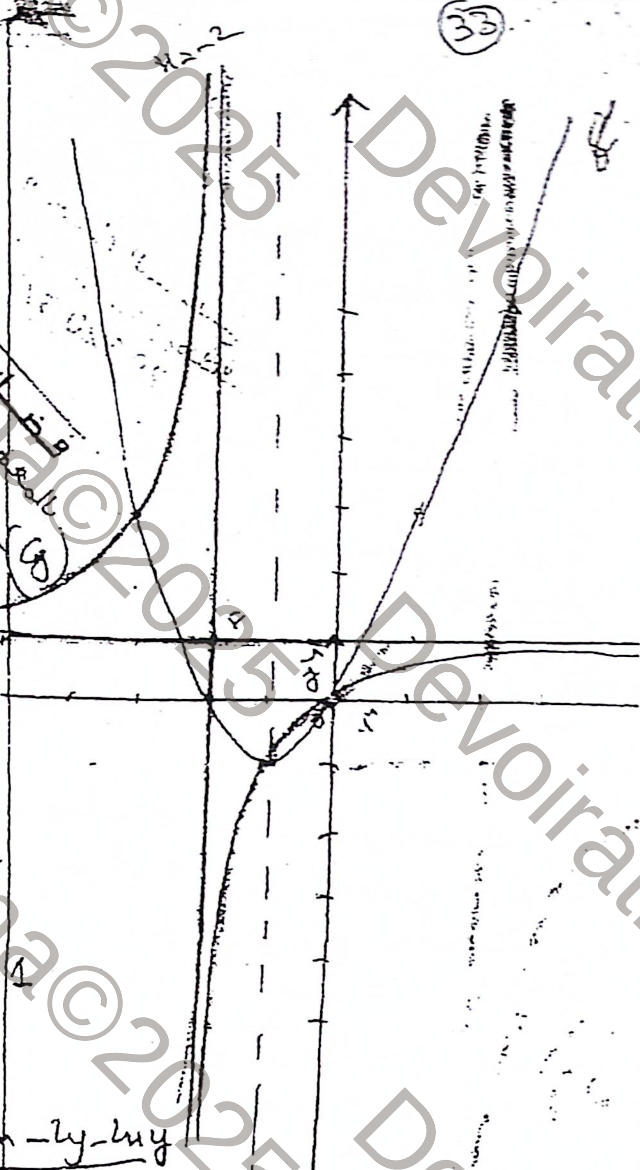
$4y - 2x + 2xy = 0$

$2y - x + xy = 0$

$y(2+x) = x$

$y = \frac{x}{x+2} = g(x)$

d'où $M \in C_g$



Suite Ex 3 → (Devoir 2014)

5) donc $FH = MB = a$

donc $GH = FH$ (1)

On a dans le triangle EFG rectangle en F, I milieu de [EG].

donc $IF = IG$ (2)

D'après (1) et (2), (FG) incluse au plan médiateur de [IH]

donc $(IH) \perp (FG)$

1) (AEM) et (BMG) sont deux plans distincts car $E \notin (BMG)$ ayant un pt commun M donc ils sont sécants suivant une droite D passant par M.

$(AE) = \Delta$ $(BG) = \Delta'$

$(AE) \perp P$ et $(AE) \subset (AEM)$

d'où $(AEM) \perp P$.

$(BG) \perp P$ et $(BG) \subset (BMG)$

d'où $(BMG) \perp P$.

or $D = (AEM) \cap (BMG)$

d'où $\boxed{D \perp P}$

2) on a : $(AE) \perp P$ et $(MB) \subset P$

d'où $(AE) \perp (MB)$ (1)

[AB] est un diamètre de $\mathcal{C}$ et $M \in \mathcal{C}$ donc le triangle AMB est rectangle en M

d'où $(AM) \perp (MB)$ (2)

or $(AM) \cap (AE) = \{A\}$

d'après (1) et (2) $(MB) \perp (AME)$

or $(MB) \subset (BMG)$

d'où $(AEM) \perp (BMG)$

ou bien :

$(BG) \perp P$ et $(AM) \subset P$

donc $(BG) \perp (AM)$ (1)

$(BM) \perp (AM)$ (2) car $M \in \mathcal{C}$

or $(BG) \cap (AM) = \{B\}$

d'après (1) et (2) $(AM) \perp (BMG)$

$(AM) \subset (AME)$

d'où $(AME) \perp (BMG)$

3) a) $(AM) \perp (BMG)$

et $(AM) \parallel (EF)$

d'où $(EF) \perp (BMG)$.

b) $(EF) \perp (BMG)$

or $(FG) \subset (BMG)$

car $F \in D$

et $D \subset (BMG)$

d'où $(EF) \perp (FG)$ en F

par suite le triangle EFG est rectangle en F

4) $(AE) \perp P$ et $(BG) \perp P$

donc $(AE) \parallel (BG)$ donc AEGB est un trapèze

O milieu de [AB]

I " de [EG]

donc $(OI) \parallel (AE)$ ou $(OI) \parallel$

et $OI = \frac{1}{2}(AE + BG) = \frac{3a}{2}$

$(AE) \perp P$ d'où $(OI) \perp P$

et O le centre de $\mathcal{C}$

donc (OI) est l'axe du cercle $\mathcal{C}$.

b) $V = \frac{1}{3}\left(\frac{AM \times BM}{2}\right) OI$

$V = \frac{1}{3}\left(\frac{2a \times a}{2}\right)\frac{3a}{2} = \frac{a^3}{2}$

NB ([OI] base moyenne d'un trapèze)

5) on a $HG = a$

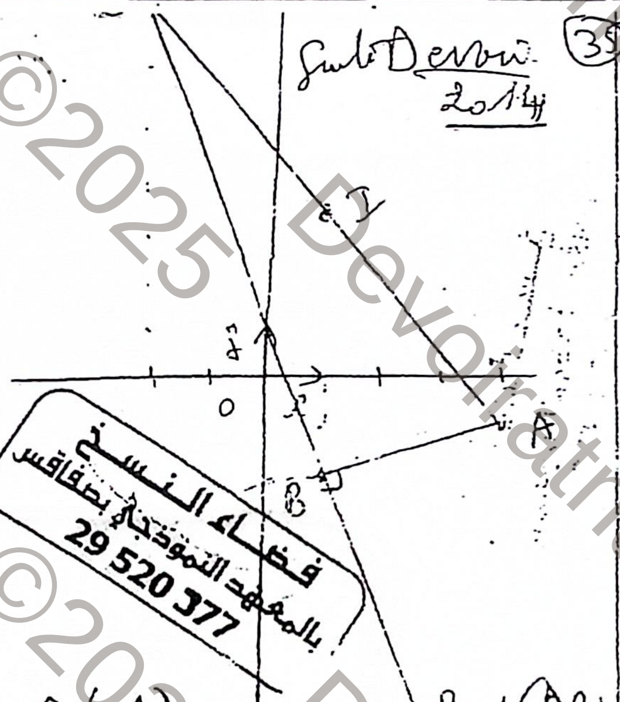
$(EF) \parallel (AM)$

$(FM) \perp P$ et $(AE) \perp P$ donc $FM \parallel AE$, donc AEFM parallélogramme

donc $FM = AE = a$

$(FM) \perp P$ et $(BH) \perp P$ donc $(FM) \parallel (BH)$ or $FM = BH = a$ donc FMBH parallélogramme

Suite Devoir 2014 (35)



1) $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ vecteur normal de (AB)

$(AB) : -x+3y+c=0$

$A\in(AB)$ donc $-4-3+c=0$

$c=7$

$(AB) : -x+3y+7=0$

$\{B\}=(AB)\cap\Delta$

$\begin{cases}-x+3y=-7\\3x+y=1\end{cases}$ $\begin{cases}-3x+9y=-21\\3x+y=1\end{cases}$

$\begin{cases}10y=-20\\-x+3y=-7\end{cases}$ $\begin{cases}y=-2\\x=1\end{cases}$

$\boxed{B(1,-2)}$

2) $C(-2,y)\in\Delta$ d'où $y=7$

$C(-2,7)$

le triangle ABC est rectangle en B donc le milieu I de [AC] est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

$x_I=\dfrac{x_A+x_C}{2}=1$

$y_I=\dfrac{y_A+y_C}{2}=3$ $I(1,3)$

$\mathscr{C} : (x-1)^2+(y-3)^2=R^2$

$R=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{\sqrt{(-2-4)^2+(7+1)^2}}{2}$

$=5$

$\boxed{\mathscr{C} : (x-1)^2+(y-3)^2=25}$

3) a) $E(1,-4)$ $IE=7>5$ donc E est à l'extérieur de $\mathscr{C}$

b) $D : y=mx+p$

$E\in D$ donc $-4=m+p$

d'où $p=-4-m$

$\boxed{D : mx-y-4-m=0}$

c) $d(I,D)=R$

$\dfrac{|m-3-4-m|}{\sqrt{m^2+1}}=5$

$\dfrac{7}{\sqrt{m^2+1}}=5$

$49=25(m^2+1)$

$25m^2=24$

$m^2=\dfrac{24}{25}$ d'où $m=\dfrac{2\sqrt6}{5}$

ou $m=-\dfrac{2\sqrt6}{5}$

les équations des tangentes sont

$D_1 : \dfrac{2\sqrt6}{5}x-y-4-\dfrac{2\sqrt6}{5}=0$

D_1 $2\sqrt6\,x-5y-20-2\sqrt6$

$D_2 : -\dfrac{2\sqrt6}{5}x-y-4+\dfrac{2\sqrt6}{5}=$

$D_2 : 2\sqrt6\,x+5y+20-2$