| Lycée Pilote Sfax | DEVOIR DE SYNTHESE N°2<br>MATHEMATIQUES | Niveau : 2$^{ème}$ année<br>Durée : 2h |
|---|---|---|

**Exercice 1 (6 points)**

Soit $(U_n)$ la suite définie sur IN par $U_n = 3n+1$.

1/ Montrer que $(U_n)$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

2/ On pose $S = U_0+U_1+U_2+\cdots+U_n$ , $n \in IN$

a/ Exprimer S en fonction de n.

b/ En déduire en fonction de n la somme : $A = 5+8+11+\cdots+(3n-1)$.

3/ Soit la suite $(V_n)$ définie sur IN par $V_n = \dfrac{2^{U_n}}{5}$.

a/ Montrer que $(V_n)$ est une suite géométrique de raison 8.

b/ On pose $S'_n = V_1+V_2+V_3+\cdots+V_n$

Déterminer l'entier n pour que S' soit égale à 1872.

4/ Soit $(W_n)$ la suite définie sur IN par $W_n = 5^n.8^n - 5^n.V_n$

Montrer que $(W_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.

**Exercice 2 (2 points)**

Salma veut acheter un téléphone portable. Son père s'engage à l'aider en lui donnant le premier jour 10 dinars ensuite chaque jour il lui donne 3 dinars.

On désigne par $U_n$ le montant de la somme d'argent obtenu le n$^{ème}$ jour.

1/a/ Donner les valeurs de $U_1$ , $U_2$ et $U_3$

b/ Exprimer $U_n$ en fonction de n pour tout $n \in IN^*$.

2/ Sachant que le portable coûte 350 dinars quel est le nombre minimal de jours pour que Salma puisse acheter le téléphone portable.

**Exercice 3 (5 points)**

ABC est un triangle équilatéral de sens direct, M un point du segment [AB] distinct de A et B.

La parallèle à (BC) passant par M coupe [AC] en E et la parallèle à (AC) passant par M coupe [BC] en Q.

Soit r la rotation indirecte de centre M et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

1/ Montrer que $r(A) = E$ et $r(Q) = B$.

2/a/ Construire C' image de C par r.

b/ Montrer que $C'\hat{E}M = \dfrac{\pi}{3}$.

c/ Montrer que AEC'B est un parallélogramme.

3/ La droite (MQ) coupe (EC') en F.

Montrer que $r(E) = F$.

4/ La perpendiculaire à (MF) passant par E coupe (AB) en F'.

a/ Déterminer $r((AF))$.

b/ Montrer que $r(F) = F'$.

23



## Exercice 4 (7 points)

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $B\hat{A}C \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. La bissectrice de l'angle $B\hat{A}C$ coupe [BC] en H.

Soit K le projeté orthogonal de B sur (AC). On pose AB = a et $B\hat{A}C = \alpha$

1/ Montrer que $B\hat{A}H = C\hat{B}K$.

2/ Montrer que $BC = 2a\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ et $BK = a\sin\alpha$.

3/a/ Vérifier que $B\hat{C}K = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ et que $\frac{BK}{BC} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

b/ Montrer alors que $\sin\alpha = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

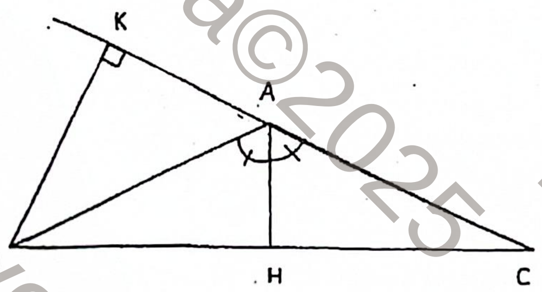
c/ Calculer alors $\sin\frac{5\pi}{12} \cdot \cos\frac{5\pi}{12}$

4/ a/ En utilisant le triangle ABK, montrer que $AK = -a\cos\alpha$.

b/ Montrer que $CK = 2a\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

c/ En déduire que $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

d/ Evaluer alors $\sin\frac{5\pi}{12}$ et $\cos\frac{5\pi}{12}$, en déduire que $\tan\frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$



Lycée Pilote Sfax 1 — Devoir de synthèse N°2
Mathématiques (2 Sc)

Exercice 1 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$

$u_{n+1} - u_n = 3(n+1)+1 - 3n - 1 = 3$ (cste)

Donc $(u_n)$ est une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = 1$

2) a) $S_n = \frac{1}{2}(n+1)(u_0 + u_n)$

Donc $S_n = \frac{(n+1)(3n+2)}{2}$

b) $A_n = S_n - u_0 - u_1 - u_n$

$= \frac{(n+1)(3n+2)}{2} - (3n+1)$ $\left(\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ u_1 = 3 \end{array}\right)$

Donc $A_n = \frac{3n^2 - n - 8}{2}$

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$

$v_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot 2^{u_{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot 2^{u_n + 3}$

$= \frac{1}{2} \cdot 2^{u_n} \cdot 2^3 = 8 v_n$

8 est une constante donc $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = 8$ de premier terme $v_0 = \frac{2}{1}$

b) $S'_n = v_1 \cdot \frac{8^n - 1}{8 - 1}$ ; $(q \neq 1)$ $v_1 = \frac{16}{5}$

$S'_n = \frac{16}{35}(8^n - 1)$

le........................................

3) $\widehat{MEC'} = \frac{\pi}{3}$ et $F \in [C'E]$ Alors $\widehat{MEF} = \frac{\pi}{3}$

$AEC'B$ parallélogramme donc $(AB) // (EC')$

$M \in [AB]$ et $F \in [EC']$ Donc $(AM) // (EF)$

et comme $(MF) // (AE)$ ; $((MQ) // (AC)$ ; $F \in (MQ)$ et $E \in (AC))$

Alors $MAEF$ est un parallélogramme.

Donc $\widehat{MFE} = \widehat{MAE} = \frac{\pi}{3}$ ($AME$ équilatéral)

Ainsi $\widehat{MEF} = \widehat{MFE} = \frac{\pi}{3}$

Donc $MEF$ est équilatéral

de sens indirect alors $r(E) = F$

4) a) $MAEF$ losange (parallélogramme tel que $AM = AE$)

Donc $(AF) \perp (ME)$

$r((AF)) \perp r((ME))$ $r$ conserve l'orthogonalité

$r((AF)) \perp (MF)$ ; $(r(M) = M$ et $r(E) = F)$

comme $r(A) = F$

Donc $r((AF)) = (EF')$, $\left( \begin{array}{l} (EF') \perp (MF) \\ E \in (EF') \end{array} \right)$

b) $F \in (MQ) \cap (AF)$

$r(F) \in r((MQ)) \cap r((AF))$

$r(F) \in (MB) \cap (EF')$

or $(MB) \cap (EF') = \{F'\}$

Donc $r(F) = F'$

le,.....................................

28

3) a) $BCK$ triangle rectangle en $K$

et $\widehat{CBK} = \widehat{BAH} = \frac{\alpha}{2}$.

Donc $\widehat{BCK} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$

$\sin \widehat{BCK} = \frac{BK}{BC}$ Donc $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{BK}{BC}$

Par suite $\frac{BK}{BC} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

b) $\frac{BK}{BC} = \cos\frac{\alpha}{2}$ Donc $\frac{a\sin\alpha}{2a\sin\frac{\alpha}{2}} = \cos\frac{\alpha}{2}$ Alors

$\sin\alpha = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

c) $\frac{5\pi}{6} \in ]0, \pi[$

et comme $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

Alors $\sin\frac{5\pi}{6} = 2\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ Alors $\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$

4) a) $\cos\widehat{BAK} = \frac{AK}{AB}$

Donc $\cos(\pi - \alpha) = \frac{AK}{a}$

D'où $AK = -a\cos\alpha$

b) $\cos\widehat{BCK} = \frac{CK}{BC}$ Donc $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{CK}{2a\sin\frac{\alpha}{2}}$

D'où $CK = 2a\sin^2\frac{\alpha}{2}$.



$A \in [CK]$ Donc $CK = AC + AK$

$2a\sin^2\frac{\alpha}{2} = a - a\cos\alpha$.

Donc $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ ; $(a \neq 0)$

d) $\frac{5\pi}{6} \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$ et $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

Donc $\cos\frac{5\pi}{6} = 1 - 2\sin^2\frac{5\pi}{12}$

Donc $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ ; $\left(\sin\frac{5\pi}{12} > 0\right)$

Puisque $\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$ On trouve $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

le,.................................

Exercice 4 :

20

1) K projeté orthogonal de B sur (AC)

Donc $BCK$ est un triangle rectangle en K

D'où $B\hat{C}A + C\hat{B}K = \frac{\pi}{2}$

$H\hat{C}A + C\hat{B}K = \frac{\pi}{2}$ ① ; $(H \in [BC])$

H projeté orthogonal de A sur (BC).

Donc AHC est un triangle rectangle en H.

D'où $H\hat{C}A + H\hat{A}C = \frac{\pi}{2}$ ②

① et ② Donnent $C\hat{B}K = H\hat{A}C$

or [AH) bissectrice de $B\hat{A}C$ Alors $H\hat{A}C = B\hat{A}H = \frac{\alpha}{2}$

Par suite $C\hat{B}K = B\hat{A}H$

2) • ABH triangle rectangle en H

Donc $\sin B\hat{A}H = \frac{BH}{AB}$

$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{BH}{a}$. Donc $BH = a \sin \frac{\alpha}{2}$.

Or ABC isocèle en A et [AH) bissectrice de $B\hat{A}C$

et $H \in (BC)$ Donc H milieu de [AC]

Alors $BH = \frac{1}{2} BC$

Par suite $\boxed{BC = 2a \sin \frac{\alpha}{2}}$

• BAK triangle rectangle en K

Alors $\sin B\hat{A}K = \frac{BK}{AB}$

$\sin(\pi - B\hat{A}C) = \frac{BK}{AB}$ ; $\left(B\hat{A}K + B\hat{A}C = \pi \text{ car } A \in [KC]\right)$

Donc $\sin \alpha = \frac{BK}{a}$ ; $(B\hat{A}C = \alpha)$

$\boxed{\text{Alors } BK = a \sin \alpha}$