Lycée Pilote Sfax

Devoir synthèse N : 2
Mathématiques

2sc
Durée : 2h

Exercice 1 : (7 points)

On considère les suites u et v définies sur IN par : $u_n = \frac{1}{3}(3^n - 6n + 4)$ et $v_n = \frac{1}{3}(3^n + 6n - 4)$

1) Soit la suite (a_n) définie sur IN par : $a_n = u_n - v_n$
   a) Exprimer a_n en fonction de n
   b) Montrer que la suite (a_n) est arithmétique
   c) Calculer la somme $S_1 = a_0 + a_1 + \ldots a_{10}$

2) Soit la suite (b_n) définie sur IN par : $b_n = u_n + v_n$

a) Exprimer b_n en fonction de n

b) Montrer que la suite (b_n) est géométrique

c) Exprimer la somme $S_n = b_0 + b_1 + \ldots b_n$ en fonction de n

d) Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $\left|S_n + \frac{1}{3}\right| \geq 10^3$

e) Calculer les sommes : $S = u_0 + u_1 \ldots u_{10}$ et. $S' = v_0 + v_1 + \ldots v_{10}$

Exercice 2 : (7 points)

Soit ABCD un carré indirecte et r la rotation directe de centre B d'angle $\frac{\Pi}{4}$

Soit A' et D' les images respectives de A et D par r

1) Montrer que $A' \in [BD]$ et $C \in [BD']$
2) Soit Δ la perpendiculaire à (A'D') passant par D'
Déterminer r((AD)) et r((DC))
3) Soit (C) le cercle de centre B et passant par A
   a) Montrer que (C) passe par A' et C
   b) Montrer que Δ est tangente à (C) en C' image de C par r
4) Soit M un point du plan distinct de B et C tel que $(MC) \perp (MB)$ et soit M' = r(M)
Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M varie

Exercice 3 : (6 points)

On considère un triangle ABC isocèle en A tel que $\widehat{BAC} \in \left]\frac{\pi}{2} ; \pi\right[$

On désigne par H le projeté orthogonal de A sur (BC) et par K le projeté orthogonal de B sur (AC)

1) Montrer que $\widehat{BAH} = \widehat{CBK}$
2) On pose $AB = x$ et $\widehat{BAC} = \alpha$
   a) Exprimer : BC en fonction de x et $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ et BK en fonction de x et $\sin\alpha$
   b) Déduire que : $\sin\alpha = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ puis évaluer $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

3) a) Exprimer AK puis CK en fonction de x et $\cos\alpha$

   b) Déduire que : $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ puis évaluer $\sin\frac{5\Pi}{12}$ et $\cos\frac{5\Pi}{12}$

Lycée Pilote Sfax 1 — Devoir Synthèse n°2 — Mathématiques

16

Exercice 1 :

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $a_n = u_n - v_n$

Donc $a_n = \frac{8}{3} - 4n$.

b) $a_{n+1} - a_n = \frac{8}{3} - 4(n+1) - \frac{8}{3} + 4n$

$= -4$ (cste)

Donc (a_n) est une suite arithmétique de raison (-4)

c) $S_1 = \frac{11}{2}(a_0 + a_{10})$; $a_0 = \frac{8}{3}$ et $a_{10} = \frac{-112}{3}$.

Donc $S_1 = \frac{-572}{3}$.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $b_n = u_n + v_n$

Donc $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

b) $b_{n+1} = 2 \cdot 3^n = 2 \cdot 3^{n-1} \cdot 3 = 3 b_n$

Donc (b_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$

c) $S_n = b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_n$

$= b_0 \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1}$; $\left(b_0 = \frac{2}{3}\right)$

$S_n = \frac{3^{n+1} - 1}{3}$

$n+1$

d) $\left| S_n + \frac{1}{3} \right| \geq 10^3$

$3^n \geq 10^3$

on a : $3^6 = 729 < 10^3$ et $3^7 = 2187 > 10^3$

Donc la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $\left| S_n + \frac{1}{3} \right| \geq 10^3$ est $n = 7$

le, ...

c) $\begin{cases} a_n = u_n - v_n \\ b_n = u_n + v_n \end{cases}$ Donc $\begin{cases} u_n = \frac{a_n + b_n}{2} \\ v_n = \frac{b_n - a_n}{2} \end{cases}$

• $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{10}$

$= \frac{1}{2}(a_0 + b_0) + \frac{1}{2}(a_1 + b_1) + ... + \frac{1}{2}(a_{10} + b_{10})$

$= \frac{1}{2}\left[(a_0 + a_1 + ... + a_{10}) + (b_0 + b_1 + ... + b_{10})\right]$

$S = \frac{1}{2}\left[S_1 + S_{10}\right]$

D'où $S =$

• $S' = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{10}$

$= \frac{1}{2}(b_0 - a_0) + \frac{1}{2}(b_1 - a_1) + ... + \frac{1}{2}(b_{10} - a_{10})$

$= \frac{1}{2}\left[(b_0 + b_1 + ... + b_{10}) - (a_0 + a_1 + ... + a_{10})\right]$

$= \frac{1}{2}\left[S_{10} - S_1\right]$

D'où $S' =$

Exercice 2 :

1) • $r(A) = A'$ tq : $\begin{cases} BA = BA' \\ \widehat{ABA'} = \frac{\pi}{4} \\ A'BA \text{ de sens direct} \end{cases}$

ABCD carré de sens indirect

Donc $\widehat{ABD} = \frac{\pi}{4}$ et DBA de sens direct

Alors $\widehat{ABA'} = \widehat{ABD}$ et $A'BA$ et DBA de même sens

Donc $[BD)$ et $[BA')$ sont confondues Alors $A' \in [BD)$

$BD = \sqrt{2}\, BA$ Donc $BD > BA$ ou $BA = BA'$

Alors $BD > BA'$ par suite $A' \in [BD]$.

le,.........................

tangente à (C) en C (18)

Alors $r((CD))$ est tangente à $r((C))$ en $r(C)$.

" r conserve le contact "

D'ou Δ est tangente à (C) en C'

tel que $r(C) = C'$.

2) $(MC) \perp (MB)$ Donc M décrit $\mathcal{C}_1 \setminus \{B ; C\}$

avec $\mathcal{C}_1$ cercle de diametre [BC]

Alors $r(M)$ décrit $r(\mathcal{C}_1) \setminus \{r(B) ; r(C)\}$.

D'ou M' decrit $\mathcal{C}'_1 \setminus \{B, C'\}$

Tel que $\mathcal{C}'_1$ est le cercle de diametre [BC']

Exercice 3 :

1) K projeté orthogonal de B sur (AC)

Donc CBK est un triangle rectangle en K

Alors $B\hat{C}K + C\hat{B}K = \frac{\pi}{2}$

$H\hat{C}A + C\hat{B}K = \frac{\pi}{2}$ ① ($K \in [CA)$; $H \in [BC]$)

H projeté orthogonal de A sur [BC] et ABC isocèle

en A Donc H est le milieu de [BC] $H\hat{A}C = B\hat{A}H$

AHC est un triangle rectangle en H

D'ou $H\hat{C}A + H\hat{A}C = \frac{\pi}{2}$ ②

① et ② donnent $C\hat{B}K = H\hat{A}C$

or $H\hat{A}C = B\hat{A}H$; alors $B\hat{A}H = C\hat{B}K$

2) a) BAH est un triangle rectangle en H

Donc $\sin B\hat{A}H = \frac{BH}{AB}$

Alors $BH = x \sin(\frac{\alpha}{2})$; $(B\hat{A}H = \frac{1}{2} B\hat{A}C)$

BAK est un triangle rectangle en K

D'ou $\sin B\hat{A}K = \frac{BK}{AB}$ or $B\hat{A}K = \pi - B\hat{A}C = \pi - \alpha$

Alors $BK = x \sin(\pi - \alpha)$ Par suite $BK = x \sin\alpha$

le,..............................

(19)

• $r(D) = D'$ équi : $\begin{cases} BD = BD' \\ \widehat{DBD'} = \frac{\pi}{4} \\ D'BD \text{ de sens direct} \end{cases}$

ABCD carré indirect

Donc $\widehat{DBC} = \frac{\pi}{4}$ et CBD de sens direct

Alors $\widehat{DBD'} = \widehat{DBC}$ et D'BD, D'BD de même sens

donc [BD') et [BC) sont confondues d'où $D' \in [BC)$

$BD = \sqrt{2}\, BC$ Donc $BC < BD$

Comme $BD = BD'$ Alors $BC < BD'$

par suite $C \in [BD']$

2) $r((AD)) = (A'D')$; $r(A) = A'$ et $r(D) = D'$

$(DC) \perp (AD)$

$r((DC)) \perp r((AD))$

$r((DC)) \perp (A'D')$

$D \in (DC)$ donc $r(D) \in r((DC))$

d'où $D' \in r((DC))$

Comme $\Delta \perp (A'D')$ et $D' \in \Delta$

alors $r((DC)) = \Delta$

3) a) (C) est un cercle de centre B

Donc r((C)) est le cercle de centre r(B) = B

et isométrique à (C) d'où r((C)) = (C).

$A \in (C)$ donc $r(A) \in r((C))$ d'où $A' \in (C)$.

ABCD est un carré donc BA = BC

Comme B est le centre de (C) et $A \in (C)$ Alors $C \in (C)$

Autrement : $BA = BA'$ ($r(A) = A'$) et $BA = BC$ (carré)

B centre de (C) et $A \in (C)$ donc $A' \in (C)$ et $C \in (C)$

b) ABCD est un carré donc $(BC) \perp (CD)$

$C \in (C)$ et B centre de (C) Alors (CD) est la le,..............................

20

BKC est un triangle rectangle en K

Alors $\cos \widehat{CBK} = \frac{BK}{BC}$ $\left(\widehat{CBK} = \widehat{BAH} = \frac{\alpha}{2}\right)$

Donc $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{x\sin\alpha}{2BH}$

$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{x\sin\alpha}{2x\sin\frac{\alpha}{2}}$

Par suite $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$

b) Soit $\alpha = \frac{5\pi}{6}$, $\left(\frac{5\pi}{6}\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[\right)$

Comme $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

Alors $\sin\frac{5\pi}{6} = 2\sin\frac{5\pi}{12}\cdot\cos\frac{5\pi}{12}$

Donc $\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$, $\left(\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\right)$

3) $\cos\widehat{BAK} = \frac{AK}{AB}$, (ABK triangle rectangle en K)

$\cos(\pi-\alpha) = \frac{AK}{x}$

$-\cos\alpha = \frac{AK}{x}$ Donc $AK = -x\cos\alpha$

$A\in[CK]$ Donc $CK = CA + AK$

$CK = x - x\cos\alpha$

b) BCK est un triangle rectangle en K

d'après Pythagore $BC^2 = BK^2 + CK^2$

$\left(2x\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = (x\sin\alpha)^2 + (x - x\cos\alpha)^2$

$4x^2\sin^2\frac{\alpha}{2} = x^2\sin^2\alpha + x^2 - 2x^2\cos\alpha + x^2\cos^2\alpha$

$4x^2\sin^2\frac{\alpha}{2} = x^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + x^2 - 2x^2\cos\alpha$

Donc $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

YAMAMA HIGH QUALITY

le,.................................

b) Soit $\alpha = \frac{5\pi}{6}$; $\left(\frac{5\pi}{6} \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[\right)$ (2,1)

Puisque $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

Alors $\cos\frac{5\pi}{6} = 1 - 2\sin^2\frac{5\pi}{12}$

$\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ Donc $-\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{5\pi}{12}$

$\sin^2\frac{5\pi}{12} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$

$\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$, $\left(\sin\frac{5\pi}{12} > 0\right)$

Comme $\sin\frac{5\pi}{12} \cdot \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$

Alors $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$