Lycée pilote Sfax	Devoir de synthèse Mathématiques	$2^{ème}$ Sciences Durée : 2h

Exercice 1 (6.5 points)

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique telle que $U_3 = 11$ et $U_7 = 23$.

1) Déterminer la raison de la suite (U_n) et montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = 2+3n$.

2) Soit $S = U_0 + U_1 + ... + U_{n-1}$, $n \geq 1$.

a) Exprimer S en fonction de n.

b) Déterminer n pour que $S = 40$.

3) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = U_{2n}$.

a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison.

b) Exprimer en fonction de n la somme $S' = U_0 + U_2 + U_4 + ... + U_{2n}$.

4) Soit a un entier naturel dont la somme de ses chiffres est 14.

a) Montrer que a est un terme de la suite (U_n).

b) Déterminer a sachant que son quotient *dans la division* euclidienne par 3 est 121.

Exercice 2 (2 points)

Le code confidentiel d'une clé d'une voiture est composé de quatre chiffres abcd, $(a < b < c < d)$, formant une progression arithmétique de raison 2.

Trouver ce code sachant que le reste de sa division euclidienne par 9 est égal à 6.

Exercice 3 (7 points)

Soit $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ un repère orthonormé du plan et soit A' le symétrique de A par rapport à O.

On désigne par $\mathscr{C}$ le demi – cercle de diamètre $[AA']$ et contenant le point B. Soit α un réel appartenant à $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ et soit M le point de $\mathscr{C}$ tel que $\widehat{AA'M} = \alpha$ et H le projeté orthogonal de M sur la droite (AA').

1) a) Montrer que $\widehat{AOM} = 2\alpha$.

b) Déterminer alors les coordonnées du point M.

c). Vérifier que $A'H = 1+\cos(2\alpha)$ et que $MH = \sin(2\alpha)$.

2) Soit K le projeté orthogonal de O sur $[A'M]$.

a) Montrer que $A'M = 2\cos\alpha$.

b) Montrer que $2\cos^2\alpha = 1+\cos(2\alpha)$.

c) Donner la valeur exacte $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

d) Sachant que $\tan(2\alpha) = \frac{3}{4}$, calculer $\cos(2\alpha)$ et $\cos\alpha$.

Exercice 4 (4.5 points)

ABC est un triangle rectangle en A direct, inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O telque $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$.

1) a) Construire le point I symétrique de O par rapport à la droite (AC).

b) Montrer que $I \in \mathscr{C}$.

2) Soit R la rotation directe de centre I et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a) Montrer que C est l'image de A par R.

b) Construire le point C' image de C par R.

c) Montrer que la droite (CC') est tangente à $\mathscr{C}$.

d) Soit le point B' image de B par R. Montrer que les points B, C et B' sont alignés.

Exercice 4 :

1) a) Voir une figure

b) I étant le symétrique de O par rapport à (AC)

Donc $(OI) \perp (AC)$ et $CO = CI$, Comme $(AB) \perp (AC)$ Alors $(AB) // (OI)$

$A\hat{B}C$ et $I\hat{O}C$ sont correspondant formé par (AB), (OI) et la sécante

(BC) Du fait que $(AB) // (OI)$ on trouve $I\hat{O}C = A\hat{B}C = \frac{\pi}{3}$

Donc OCI est un triangle équilatéral ($CO = CI$ et $I\hat{O}C = \frac{\pi}{3}$)

Alors $OI = OC$ et comme $C \in \mathscr{C}$ Alors $I \in \mathscr{C}$.

2) a) (AC) est la médiatrice de [OI] ; ($I = S_{(AC)}(O)$)

Alors $AO = AI$ et $CO = CI$ puisque $OC = OA$

Alors $AO = AI = CO = CI$ et comme $CO = OI$

Alors AOI et OIC sont des triangles équilatéraux

Puisque $A\hat{I}O$ et $O\hat{I}C$ sont adjacents alors $A\hat{I}C = \frac{2\pi}{3}$

Ainsi $IA = IC$; $A\hat{I}C = \frac{2\pi}{3}$; IAC de sens direct

Alors $R(A) = C$.

b) $R(C) = C'$ équivaut à : $\begin{cases} IC = IC' \\ C\hat{I}C' = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$

ICC' de sens direct

c) ICC' est un triangle isocèle en I tel que $C\hat{I}C' = \frac{2\pi}{3}$.

Donc $I\hat{C}C' = \frac{1}{2}(\pi - \frac{2\pi}{3}) = \frac{\pi}{6}$

Les angles $O\hat{C}I$ et $I\hat{C}C'$ sont adjacents donc

$O\hat{C}C' = O\hat{C}I + I\hat{C}C'$ Alors $O\hat{C}C' = \frac{\pi}{2}$

Comme O est le centre de $\mathscr{C}$ et $C \in \mathscr{C}$ alors (CC') est

la tangente à $\mathscr{C}$ en C

d) ABC triangle rectangle en A

donc $(AB) \perp (AC)$

$R((AB)) \perp R((AC))$, R conserve l'orthogonalité

$(CB') \perp (CC')$, ($R(A) = C$; $R(B) = B'$; $R(C) = C'$)

Comme $(CB) \perp (CC')$, ($(CC') \perp (OC)$ et $B \in (OC)$)

Alors $(CB') // (CB)$ par suite

C, B et B' sont alignés

2) a) $[AA']$ est un diamètre de $\mathscr{C}$ et $M \in \mathscr{C} \setminus \{A, A'\}$, $(\alpha \in]0, \frac{\pi}{4}[)$ Donc $AA'M$ est un triangle rectangle en M

d'où $\cos \widehat{AA'M} = \frac{A'M}{A'A}$

Donc $\cos\alpha = \frac{A'M}{2}$ par suite $A'M = 2\cos\alpha$

b) $AA'M$ est un triangle rectangle en M et H le projeté orthogonal de M sur (AA')

D'après l'une des relations métriques dans un triangle rectangle on trouve $A'M^2 = A'H \cdot A'A$

$(2\cos\alpha)^2 = (1+\cos(2\alpha)) \cdot 2$

Donc $2\cos^2\alpha = 1+\cos(2\alpha)$

(N.B : on pourra utiliser K en écrivant $2A'K = A'M$)

c) • Choisissons $\alpha = \frac{\pi}{12}$; $(\frac{\pi}{12} \in]0, \frac{\pi}{4}[)$

Comme $2\cos^2\alpha = 1+\cos(2\alpha)$

Alors $2\cos^2\frac{\pi}{12} = 1+\cos\frac{\pi}{6}$

$\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$ $\left(\cos\frac{\pi}{12} > 0 \text{ et } \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Donc $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

• $\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12}$

Donc $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

d) $2\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $1+\tan^2(2\alpha) = \frac{1}{\cos^2(2\alpha)}$

$1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2(2\alpha)}$ d'où $\cos(2\alpha) = \frac{4}{5}$; $\left(\cos 2\alpha > 0,\ 2\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[\right)$

or $2\cos^2(\alpha) = 1+\cos(2\alpha)$ Donc $2\cos^2(\alpha) = \frac{9}{5}$

Par suite $\cos(\alpha) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$; $\left(\cos\alpha > 0,\ \alpha \in]0, \frac{\pi}{4}[\right)$