2023

Lycée pilote-Sfax	Devoir de synthèse N°2	Classe : 2Sc
	Mathématiques	Durée : 2H

Exercice1 : 8points

Soit (u_n) une suite arithmétique tel que $u_4 = 5$ et $u_9 = 15$.

1/a/ Déterminer la raison r et le premier terme u_0 de cette suite.

b/ Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n - 3$.

c / Exprimer en fonction de n la somme $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

2/ Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = n + u_{2n}$.

a/ Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 5.

b/ Calculer $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{15}$

3/ On pose $T = 1+2+3+\ldots+15$, $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{30}$ et $S'' = u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{29}$

a/ Calculer T.

b/ Vérifier que $S' + S'' = S + T$, en déduire la valeur de S''.

4/ Soit (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \frac{1}{3}\left(2^n + 6n - 9\right)$.

Calculer w_0, w_1 et w_2, en déduire que (w_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

5/ Soit (a_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n = w_n - u_n$

a/ Montrer que (a_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b/ Exprimer en fonction de n les sommes $A = a_0 + a_1 + a_3 + \ldots + a_n$ et $B = w_0 + w_1 + w_3 + \ldots + w_n$

Exercice2 : 6points

Soit l'application $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -2\cos^3 x + 4\cos x - 5\sin x \cos x$

1/ Calculer $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

2/ Sachant que $tg\alpha = -\sqrt{2}$ en déduire $\cos\alpha$ et $f(\alpha)$

3/ a/ Montrer que pour tout $x \in [0,\pi]$, $f(\pi - x) + f(x) = 0$.

b/ En déduire la valeur de la somme $f\left(\frac{\pi}{8}\right) + f\left(\frac{3\pi}{8}\right) + f\left(\frac{5\pi}{8}\right) + f\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

4/ a/ Résoudre dans $[0,\pi]$ l'équation : $-2\cos^2 x - 5\sin x + 4 = 0$

b/ En déduire l'ensemble des solutions de l'équation : $f(x) = 0$.

Exercice3 : 6points

Soit ABC un triangle tel que $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{6}$, $AC = 3\sqrt{6}$ et $BC = 6\sqrt{3}$.

1/ Calculer $\sin\widehat{BAC}$ en déduire $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACB}$ en radians.

2/ Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).

a/ Calculer BH et AH.

b/ En déduire que $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

c/ Déterminer $\sin\frac{5\pi}{12}$ et $\cos\frac{\pi}{12}$. En déduire que $tg\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$

d/ Résoudre dans $[0,\pi]$ l'équation : $tg^2 x - (\sqrt{3} - 1)tgx + 2 - \sqrt{3} = 0$

Exercice 1:

1) a) $U_9 - U_4 = (9-4)r$

$r = \frac{15-5}{9-4} = 2$ 0,5

$U_0 = U_4 - 4r = 5 - 8 = -3$ 0,5

b) $U_n = U_0 + nr$ (S.A)

$U_n = -3 + 2n$ 0,25

c) $S_n = U_0 + \dots + U_n$

$= \frac{(n+1)(U_0+U_n)}{2}$

$= \frac{(n+1)(-3-3+2n)}{2}$

$= \frac{(n+1)(-6+2n)}{2}$

$= (n+1)(n-3)$. 0,75

2) a) $v_n = n + U_{2n} = n + (-3) + 2(2n)$

$= 5n - 3$.

$v_{n+1} = 5(n+1) - 3$

$= \underbrace{5n-3} + 5$

$= v_n + 5$

d'où (v_n) est une S.A de raison 5. 0,75

b) $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{15}$

$= \frac{(v_0+v_{15})(16)}{2}$

$= (-3+72)\times 8$

$= 69\times 8 = 552$ 0,75

3) a) $T = 1+2+\dots+15$

$= \frac{16\times 15}{2} = 120$

b) $S' + S'' = v_0 + v_1 + \dots + v_{15}$
$+ u_1 + u_3 + u_5 + \dots u_{29}$

$= 0 + U_0 + 1 + U_2 + 2 + U_4 + \dots + 15 + U_{30}$

$+ U_1 + U_3 + U_5 + \dots + U_{29}$

$= (1+2+\dots+15) + (U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{30})$

$= T + S$ 0,75

$S'' = T + S - S'$, $S = S_{30} = 31\times 27 = 837$

$= 120 + 837 - 552$

$= 405$. 0,25

4) a) $w_0 = \frac{1}{3}(2^0 + 6\times 0 - 9) = -\frac{8}{3}$.

$w_1 = \frac{1}{3}(2+6-9) = -\frac{1}{3}$.

$w_2 = \frac{1}{3}(4+12-9) = \frac{7}{3}$.

8

$w_1 - w_0 = -\frac{1}{3} + \frac{8}{3} = \frac{7}{3}$

$w_2 - w_1 = +\frac{1}{3} + \frac{7}{3} = +\frac{8}{3}$

$w_1 - w_0 \neq w_2 - w_1 \Rightarrow (w)$ n'est pas A.

$\frac{w_1}{w_0} = -\frac{1}{3}\times\left(-\frac{3}{8}\right) = +\frac{1}{8}$.

$\frac{w_2}{w_1} = \frac{7}{3}\times(-3) = -7$

$\frac{w_1}{w_0} \neq \frac{w_2}{w_1}$ donc (w) n'est pas G.

5) a) $a_n = w_n - u_n$

$= \frac{1}{3}(2^n + 6n - 9) - 2n + 3$

$= \frac{1}{3}\times 2^n + 2n - 3 - 2n + 3$

$= \frac{2^n}{3}$.

$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3} = 2\times\frac{2^n}{3} = 2a_n$

d'où (a_n) est une S.G de raison 2 0,75

$a_0 = \frac{2^0}{3} = \frac{1}{3}$ 0,25

b) $A = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$= a_0\left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right)$

$= \frac{1}{3}(2^{n+1} - 1)$. 0,5

$B = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n$

$= (a_0+u_0) + (a_1+u_1) + (a_2+u_2) + \dots$
$\dots + (a_n+u_n)$

$= (a_0 + a_1 + \dots + a_n) + (u_0 + u_1 + \dots + u_n)$

$= A + S_n$

$= \frac{1}{3}(2^{n+1} - 1) + (n+1)(n-3)$. 0,75

Exercice 2:

1) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + 4\frac{\sqrt{2}}{2} - 5\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{4\sqrt{2}}{2} - \frac{5}{2}$

$= \frac{3\sqrt{2}-5}{2}$. 0,5

$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 4\frac{\sqrt{3}}{2} + 5\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}$

$= \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{8\sqrt{3}}{4} + \frac{5\sqrt{3}}{4} = 0$. 0,5

2) $tg\alpha = -\sqrt{2}$

on a $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha}$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{3}$

donc $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

or $tg\alpha < 0$ donc $\cos\alpha < 0$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 0,5

on aura $\sin\alpha = tg\alpha \times \cos\alpha$

$= -\sqrt{2} \times -\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

d'où $f(\alpha) = -2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 4\frac{\sqrt{3}}{3} + 5\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}$

$= +\frac{6\sqrt{3}}{27} - \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{15\sqrt{2}}{9}$

$= \frac{+2\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 15\sqrt{2}}{9}$

$= \frac{15\sqrt{2} - 10\sqrt{3}}{9} = \frac{5\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3}$ 0,75

3) a) $f(\pi - x) = -2\cos^3(\pi - x) + 4\cos(\pi - x)$
$- 5\sin(\pi - x).\cos(\pi - x)$

$= +2\cos^3 x - 4\cos x$
$+ 5\sin x.\cos x$

$= -f(x)$

d'où $f(\pi - x) + f(x) = 0$ 0,75

b) $f(\frac{\pi}{8}) + f(\frac{3\pi}{8}) + f(\frac{5\pi}{8}) + f(\frac{7\pi}{8})$

$= f(\frac{\pi}{8}) + f(\frac{7\pi}{8}) + f(\frac{3\pi}{8}) + f(\frac{5\pi}{8})$

$= \underbrace{f(\frac{\pi}{8}) + f(\pi - \frac{\pi}{8})}_{0} + \underbrace{f(\frac{3\pi}{8}) + f(\pi - \frac{3\pi}{8})}_{0}$

$= 0$ 0,75

4) a) $-2\cos^2 x - 5\sin x + 4 = 0$

$-2(1 - \sin^2 x) - 5\sin x + 4 = 0$

$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$

On pose $y = \sin x \in [0,1]$

$2y^2 - 5y + 2 = 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9$, $\sqrt{\Delta} = 3$.

$y = \frac{5-3}{2\times 2} = \frac{1}{2}$ ou $y = 2 \notin [0,1]$

d'où $\sin x = \frac{1}{2}$

équ' $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$

$S_{[0,\pi]} = \{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$ 1,5

b) $f(x) = 0$ équ' $\cos x(-2\cos^2 x + 4 - 5\sin x) = 0$

équ' $\cos x = 0$ ou $-2\cos^2 x - 5\sin x + 4 = 0$

équ' $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$

$S_{[0,\pi]} = \{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$ 0,5

Exercice 3:

1) $\frac{BC}{\sin B\hat{A}C} = \frac{AC}{\sin A\hat{B}C}$ loi des sinus dans ABC.

$\sin B\hat{A}C = \frac{BC \times \sin A\hat{B}C}{AC}$

$= \frac{6\sqrt{3} \times \frac{1}{2}}{3\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

d'où $B\hat{A}C = \boxed{\frac{\pi}{4}}$ car $B\hat{A}C$ aigu 0,

$A\hat{C}B = \pi - (B\hat{A}C + A\hat{B}C)$

$= \pi - (\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6})$

$= \pi - \frac{5\pi}{12}$

$= \boxed{\frac{7\pi}{12}}$ 0,

2) a) Dans le triangle rect BCH:

$BH = BC \times \cos\frac{\pi}{6} = 6\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{9}$ 0,

Dans le triangle rect ACH:

$AH = AC \times \cos\frac{\pi}{4} = 3\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{3\sqrt{3}}$ 0,

b) D'après la loi du sinus dans BAC.

$\frac{AB}{\sin\hat{C}} = \frac{AC}{\sin\hat{B}}$ d'où $\sin\hat{C} = \frac{AB \times \sin\hat{B}}{AC}$

$\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{(9+3\sqrt{3}) \times \frac{1}{2}}{3\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{6\sqrt{6}}$

$= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. 1

c) $\frac{5\pi}{12} = \pi - \frac{7\pi}{12}$ donc $\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\frac{7\pi}{12}$

$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ 0,25

$\cos(\frac{\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}) = \sin\frac{5\pi}{12}$

$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. 0,25

$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ donc $tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1$

$tg^2\frac{\pi}{12} = \frac{16}{8+4\sqrt{3}} - 1 = \frac{4}{2+\sqrt{3}} - 1$

$= \frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = (2-\sqrt{3})^2$

$0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow tg\frac{\pi}{12} > 0 \Rightarrow tg\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$ 1

d) $tg^2 x - (\sqrt{3}-3)\,tg x + 2 - \sqrt{3} = 0$

on pose $y = tg x$

$y^2 - (\sqrt{3}-3)y + 2 - \sqrt{3} = 0$

$a - b + c = 0$ donc $y = -1$ ou $y = \sqrt{3} - 2$

d'où $tg x = -1$ ou $tg x = \sqrt{3} - 2 = -tg(\frac{\pi}{12})$

$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ ou $x = \frac{11\pi}{12} + k\pi$

$S_{[0,\pi]} = \{\frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}\}$ 1