Lycée Pilote Sfax

Mathématiques

DEVOIR DE SYNTHESE N°2 2020

Classes : $2^{\text{ème}}$ Sc

Exercice 1 (6,5 pts)

I. Soit U une suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ et telle que $U_3 = 7$ et $U_6 = 13$.

1°/ a) Déterminer la raison r de cette suite.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2n + 1$.

2°/ a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n = (n+1)^2$.

b) En déduire à l'aide de n, la somme $A = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$.

II. Soit V la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = 2^{U_n}$.

1°/ Montrer que V est une suite géométrique de raison 4.

2°/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1}$. Exprimer S_n à l'aide de n.

III. Soit W la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $W_n = \dfrac{1}{V_n}$.

Montrer que W est une suite géométrique puis calculer la somme $S'' = 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-5} + \dots + 2^{-11}$.

Exercice 2 (8,5 pts)

I. Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \cos^2 x + \cos x.\sin x - 1$.

1°/ a) Calculer $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ et $f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

b) Montrer que pour tout réel x de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $f(\pi - x) + f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = -1$. En déduire $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

2°/ Soit $x \in [0, \pi] \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$. Montrer que $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ puis résoudre l'équation $f(x) = 0$.

II. Soit ABC un triangle inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon $R = \sqrt{10}$. (Voir figure)

1°/ Calculer les distances AB et AC.

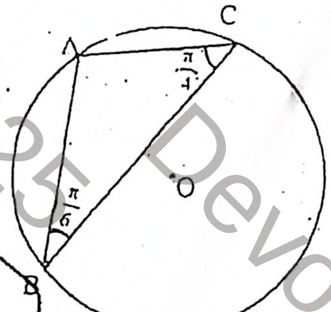
2°/ Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).

a) Calculer les distances BH et CH. En déduire que $BC = \sqrt{15} + \sqrt{5}$.

b) Calculer $\sin \dfrac{7\pi}{12}$.

c) Vérifier que $\cos \dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.

d) En déduire la valeur de $\cos \dfrac{\pi}{12}$.



المعهد النموذجي بصفاقس

Exercice 3 (5 pts)

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A direct. La bissectrice $[Cx)$ de l'angle $\widehat{ACB}$ coupe la parallèle à (AC) issue de B en C'. La droite (BC) recoupe le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[BC']$ en A'.

1°/ a) Montrer que le triangle BCC' est isocèle en B.

b) Soit R la rotation directe de centre B telle que $R(C) = C'$. Trouver la mesure de son angle en radians.

2°/ a) Montrer que $R(A) = A'$.

b) Les droites (AC) et (A'C') se coupent en E. Donner la nature du triangle CEA'.

3°/ Soit E' l'image de E par R.

a) Montrer que E et E' sont symétriques par rapport à (BC).

b) Montrer que les points B, A, E et A' sont situés sur un même cercle $\mathscr{C}_1$ que l'on précisera puis construire $\mathscr{C}'_1 = R(\mathscr{C}_1)$.

le, 2020

Lycée Pilote Sfax 1 — Devoir Synthèse N°2 — Mathématiques (2S)

(2)

Exercice 1 :

I/ 1) a) $r = \frac{u_6 - u_3}{6-3}$ Donc $r = 2$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_3 + (n-3)r$

D'où $u_n = 2n+1$

2) a) Soit $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$; $(n \in \mathbb{N})$

$= \frac{1}{2}(n+1)(u_0 + u_n)$

Donc $S'_n = (n+1)^2$

b) $A + 1 = 3 + 5 + 7 + \dots + 2n+1$

$= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$; $(2n+1 = u_n)$

$A + 1 = S'_n - 1$

$A = S'_n - 2$ Donc $A = (n+1)^2 - 2$

II/ 1) Soit $n \in \mathbb{N}$

$V_{n+1} = 2^{u_{n+1}} = 2^{u_n + 2}$ ((u) est arith de raison 2)

$= 2^2 \cdot 2^{u_n}$ Donc $V_{n+1} = 4 V_n$

(4 est une constante) Donc (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 4$ de premier terme $V_0 = 2$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$S_n = V_0 \frac{2^n - 1}{2 - 1}$, $(q = 1)$

D'où $S_n = 2^{n+1} - 2$

III/ Soit $n \in \mathbb{N}$

$W_{n+1} = \frac{1}{V_{n+1}} = \frac{1}{2V_n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{V_n}$

Donc $W_{n+1} = \frac{1}{2} W_n$ comme $\frac{1}{2}$ est une constante

alors (W_n) est une suite géométrique de raison $q' = \frac{1}{2}$ de premier terme $W_0 = \frac{1}{V_0} = \frac{1}{2}$

$S'' = W_0 + W_1 + \dots + W_5$; $(V_n = 2^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N})$

$= W_0 \cdot \frac{1 - (1/2)^6}{1 - 1/2} = \frac{2^6 - 1}{2^6}$ Donc $S'' = \frac{63}{64}$

Exercice 2 :

I/ 1) a) $f(\frac{\pi}{4}) = \cos^2(\frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{\pi}{4}) \cdot \sin(\frac{\pi}{4}) - 1$ Donc $f(\frac{\pi}{4}) = 0$

$f(\frac{5\pi}{6}) = \cos^2(\frac{5\pi}{6}) + \cos(\frac{5\pi}{6}) \cdot \sin(\frac{5\pi}{6}) - 1 = \frac{-1-\sqrt{3}}{4}$

$\cos(\frac{5\pi}{6}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin(\frac{5\pi}{6}) = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

b) Soit $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$

$f(\pi - x) + f(\frac{\pi}{2} - x) = \cos^2(\pi - x) + \cos(\pi - x) \cdot \sin(\pi - x) - 1$
$+ \cos^2(\frac{\pi}{2} - x) + \cos(\frac{\pi}{2} - x) \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - x) - 1$

Comme $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$

$\sin(\pi - x) = \sin x$, $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$ et $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

On trouve $f(\pi - x) + f(\frac{\pi}{2} - x) = -1$

$\frac{\pi}{4} \in [0; \frac{\pi}{2}]$ Donc $f(\pi - \frac{\pi}{4}) + f(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = -1$

Donc $f(\frac{3\pi}{4}) = -1 - f(\frac{\pi}{4})$ Par suite $f(\frac{3\pi}{4}) = -1$

2) Soit $x \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ Donc $\cos x \neq 0$

$f(x) = \cos^2 x \cdot \left(1 + \frac{\sin x}{\cos x}\right) - 1$

$= \frac{1}{1 + \tan^2(x)} \cdot (1 + \tan x) - 1$; $\left(\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\right)$

$= \frac{1 + \tan x - 1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

Donc $f(x) = \frac{\tan x - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

Dans $[0; \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$; $f(x) = 0$ ép à : $\tan x - \tan^2 x = 0$

ép à : $\tan x (1 - \tan x) = 0$

ép à : $\tan x = 0$ ou $\tan x = 1$

ép à : $x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = \frac{\pi}{4}$

Pour $x = \frac{\pi}{2}$; $f(\frac{\pi}{2}) = 0^2 + 0 \cdot 1 - 1 = -1 \neq 0$

Donc $S_{[0;\pi]} = \{0; \frac{\pi}{4}; \pi\}$

le, ...

Exercice 3 :

1) a) $[CC')$ est la bissectrice de $A\hat{C}B$ donc $B\hat{C}C' = \frac{1}{2} B\hat{C}A = A\hat{C}C'$

$B\hat{C'}C$ et $A\hat{C}C'$ sont alternes internes formés par (AC), (BC') et la sécante (CC') donc $A\hat{C}C' = B\hat{C'}C$

On conclut que $B\hat{C}C' = B\hat{C'}C$ Alors BCC' est isocèle en B

b) ABC est un triangle rectangle et isocèle en A

Donc $A\hat{C}B = \pi/4$ et $B\hat{C}C' = B\hat{C'}C = \frac{\pi}{8}$

$C\hat{B}C' = \pi - 2\times\frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$

Donc la mesure α de la rotation R est $\frac{3\pi}{4}$

2) a) $C'\hat{B}A'$ et $A\hat{C}B$ sont correspondants formés par (AC), (BC') et la sécante (BC) ($A' \in (BC)$)

Comme $(BC') // (AC)$ Alors $C'\hat{B}A' = A\hat{C}B = \pi/4$

$A' \in \mathscr{C}$ et $[BC']$ un diamètre de $\mathscr{C}$ Donc $BA'C'$ est un triangle rectangle en A' tel que $C'\hat{B}A' = \pi/4$ Alors

$BC' = \sqrt{2}\, BA'$ et on a $BC = \sqrt{2}\, BA$.

Puisque $BC = BC'$ Alors $BA = BA'$

$A\hat{B}C'$ et $A'\hat{B}C'$ sont adjacents donc $A\hat{B}A' = A\hat{B}C' + A'\hat{B}C'$

D'où $A\hat{B}A' = \frac{3\pi}{4}$; ($(AB) \perp (AC)$; $(BC') // (AC)$)

Ainsi : $BA = BA'$, $A\hat{B}A' = \alpha = \frac{3\pi}{4}$ et BAA' direct

Donc $R(A) = A'$

b) $B\hat{A'}C' = \frac{\pi}{2}$, donc $C\hat{A'}E = \pi/2$; ($C \in (BA')$, $E \in (A'C')$)

$A\hat{C}B = \pi/4$ donc $E\hat{C}A' = \pi/4$ ($E \in [CA)$; $A' \in [CB]$)

Donc le triangle CEA' est rectangle et isocèle en A'

3) a) $R(E) = E'$ Donc $BE = BE'$

$E \in (AC)$ Donc $R(E) \in R((AC))$ Alors $E' \in (A'C')$

Comme $E \in (A'C')$ et $(BC) \perp (A'C')$ Alors $(BC) \perp (EE')$

Ainsi $BE = BE'$ et $(BC) \perp (EE')$ Donc E, E' sont symétriques par rapport à (BC)

b) ABE et $BA'E$ des triangles rectangles de même hypothénuse $[BE]$ Donc ils sont inscrits dans le cercle $\mathscr{C}_1$ de diamètre $[BE]$, ($(AB) \perp (AC)$ et $E \in (AC)$, $(BA') \perp (A'C')$ $E' \in (A'C')$)

III/ 1) $\dfrac{AB}{\sin\frac{\pi}{4}} = 2R = \dfrac{AC}{\sin\frac{\pi}{6}}$

Donc $AB = 2\sqrt{5}$ et $AC = \sqrt{10}$, $\left(R = \sqrt{10} \; ; \; \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \right)$

2) a) ABH et ACH sont des triangles rectangles en H

Donc $\cos \widehat{ABH} = \dfrac{BH}{AB}$ et $\cos \widehat{ACH} = \dfrac{CH}{AC}$

Comme $\widehat{ABH} = \widehat{ABC} = \frac{\pi}{6}$ $(H \in [BC])$ et $\widehat{ACH} = \widehat{ACB} = \frac{\pi}{4}$; $(H \in [BC])$

et $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Alors $BH = \sqrt{15}$ et $CH = \sqrt{5}$.

Par conséquence $BC = BH + HC$, $H \in [BC]$

$BC = \sqrt{15} + \sqrt{5}$.

b) ABC est un triangle tel que $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{6}$ et $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{4}$

Donc $\widehat{BAC} = \pi - \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{7\pi}{12}$

Alors $\dfrac{BC}{\sin\frac{7\pi}{12}} = 2R$ Donc $\sin\frac{7\pi}{12} = \dfrac{BC}{2R} = \dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{5}}{2\sqrt{10}}$

conclusion : $\sin\frac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

c) $\cos^2\frac{7\pi}{12} + \sin^2\frac{7\pi}{12} = 1$

Donc $\cos^2\frac{7\pi}{12} = 1 - \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \dfrac{8 - 2\sqrt{6}\sqrt{2}}{16} = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2$

$\frac{7\pi}{12} \in \left]\frac{\pi}{2} ; \pi\right[$ Donc $\cos\frac{7\pi}{12} < 0$ D'où $\cos\frac{7\pi}{12} = \dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right)$

$= \sin\frac{5\pi}{12}$

$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{12}$

Donc $\cos\frac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

le, ...

6

$\mathscr{C}_1$ cercle de diamètre $[BE]$

Donc $R(\mathscr{C}_1)$ cercle de diamètre $R([BE])$

D'où $\mathscr{C}_1'$ est le cercle de diamètre $[BE']$

On construit le point E' symétrique de E par rapport à (BC) puis on construit le cercle $\mathscr{C}_1'$