Lycée Pilote Sfax	Devoir de Synthèse N°3	2ème sciences
Le 22/05/2024		2 heures

Exercice 1 : (5 points)

Dans l'annexe ci-jointe, (C_f) est la représentation graphique d'une fonction f définie par :

$f(x) = \frac{ax+b}{cx-1}$

1) En utilisant le graphique, montrer que $f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$.

2) Soit g la fonction définie par : $g(x) = x^2 - 4x + 4$ et (C_g) sa courbe dans le même repère.

a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C_f) et (C_g).

b) Tracer (C_g).

3) Résoudre graphiquement : a) $f(x) \leq g(x)$ b) $(g(x) - 4).f(x) \geq 0$.

4) Soit $A(1,0)$, t un réel différent de 1 et M un point de (C_f) d'abscisse t.

La parallèle à $(O,\vec{j})$ passant par M coupe la droite Δ d'équation $y = 2$ en un point N.

Montrer que l'aire du triangle AMN est constante.

Exercice N°2: (3.5 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

1) Construire (C_f) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2) Soit Δ la droite d'équation $y = x$.

a) Déterminer les abscisses des points d'intersection de (C_f) et Δ.

b) Résoudre graphiquement dans IR, l'inéquation : $\frac{2}{1-x} \leq 1 - x$.

3) Soient $M(x,y)$ et $N(y,x)$ deux points du plan. Montrer que si $M \in (C_f)$ alors $N \in (C_f)$.

Exercice N° 3: (5.5 points)

Soient $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan et les points $A(1,-1)$, $B(1,5)$, $D(-3,3)$ et $E(5,7)$.

1) a) Ecrire une équation cartésienne de la droite (AD).

b) Ecrire une équation cartésienne de Δ la perpendiculaire à (AD) et passant par B.

c) Calculer les coordonnées du point C projeté orthogonal de B sur (AD).

2) Ecrire une équation du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC.

3) Soit l'ensemble $\mathscr{C}' = \{ M(x,y)$ du plan tels que $AM = 2BM \}$.

a) Montrer que $\mathscr{C}'$ est le cercle de centre $I'(1,7)$ et passant par E.

b) Ecrire une équation de Δ' la tangente à $\mathscr{C}'$ au point E.

c) Déterminer l'équation de l'autre tangente au cercle $\mathscr{C}'$ parallèle à Δ'.

4) Soit K un point d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

Sans calculer les coordonnées de K, montrer que $AK = \frac{2AB}{\sqrt{5}}$.

Exercice N°4 : (6 points)

Dans la figure ci-dessous ABE est un triangle isocèle en E et ABCD est un carré de centre O situés dans deux plans perpendiculaires.

I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].

1) Montrer que le triangle EIJ est rectangle.

2) Soit H le milieu de [EJ]. Montrer que (OH) est l'axe du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit à ABCD.

3) a) Déterminer le plan médiateur du segment [BD].

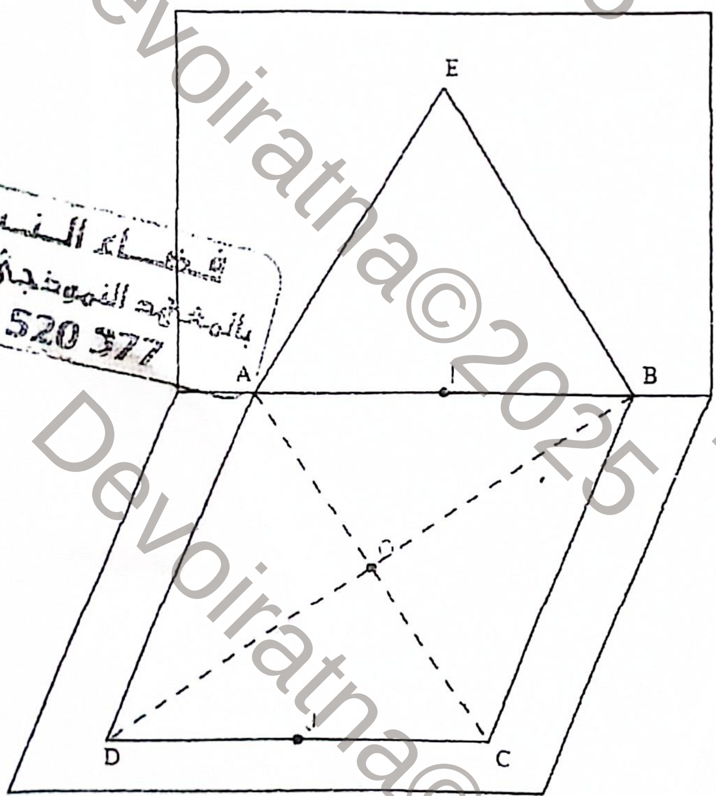
b) Déduire que (AHC) et (ABC) sont perpendiculaires.

4) Soit Δ la droite d'intersection de (AEB) et (AHC). Montrer que Δ est perpendiculaire à (ABC).

5) (CH) coupe Δ en G. Montrer que les quadrilatères AIEG et EGDJ sont des rectangles.

6) On désigne par L et S les centres respectifs de AIEG et EGDJ.

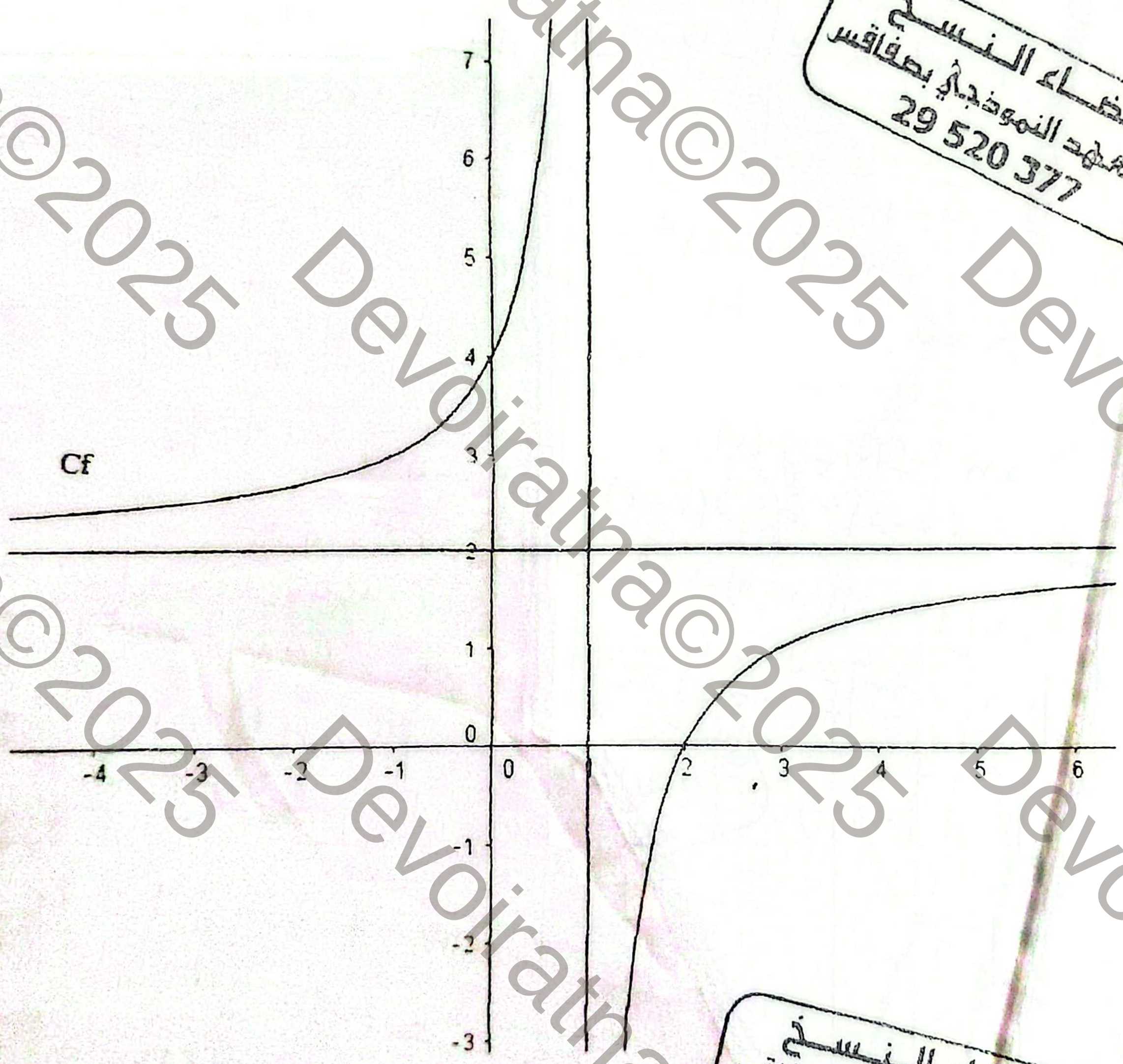
Montrer que (SL) est l'axe du cercle $\mathscr{C}'$ circonscrit à AIEG.



Lycée Pilote Sfax	**Devoir de Synthèse N°3**	*$2^{ème}$ sciences*
Le 22/05/2017		*2 heures*

Nom & prénom : ....classe : ....

Exercice 1



Correction du devoir de Synthèse N°3 : Mai 2024

Ex1 $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx-1}$

1) les droites $x=1$ et $y=2$ sont des asymptotes de $\mathcal{C}_f$. donc $\frac{a}{c}=2$ et $\frac{1}{c}=1$ d'où $c=1$ et $a=2$

donc $f(x) = \dfrac{2x+b}{x-1}$

or $f(0)=4$ d'où $-b=4$; $b=-4$

Con $f(x) = \dfrac{2x-4}{x-1}$

2) $g(x) = x^2-4x+4 = (x-2)^2$

a) Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{G}$ sont les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$. ⟺

$\dfrac{2x-4}{x-1} = (x-2)^2$ ⟺ $2(x-2) = (x-1)(x-2)^2$

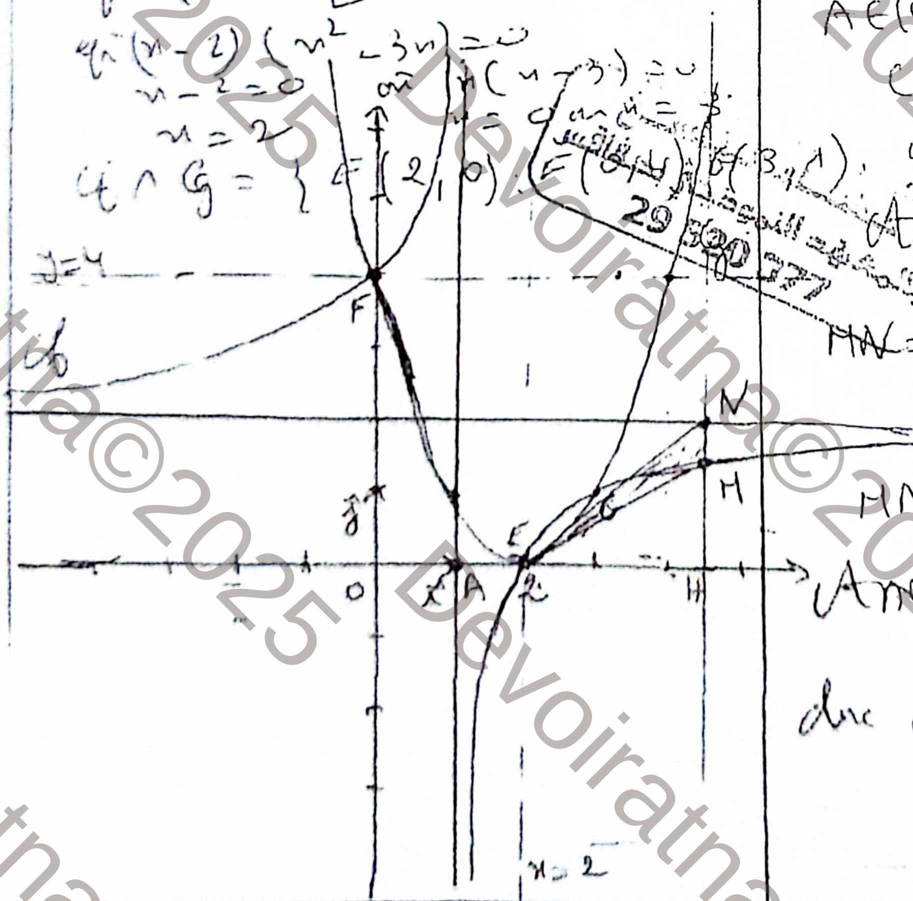
⟺ $(x-2)\left[(x-2)(x-1)-2\right]=0$

⟺ $(x-2)(x^2-3x)=0$

$x-2=0$ ou $x(x-3)=0$

$x=2$ ou $x=0$ ou $x=3$

$\mathcal{C}_f \cap \mathcal{G} = \{E(2,0) ; F(0,4) ; G(3,1)\}$



b) $\mathcal{G}$ est une parabole de sommet $S(2,0)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x=2$

x	2	3	4	5
$g(x)$	0	1	4	9

3) a) Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ qui sont au dessous ou sur $\mathcal{G}$

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty,0] \cup]1,2] \cup [3,+\infty[$

b) $[g(x)-4]\, f(x) \geq 0$

donc $g(x)-4$ et $f(x)$ sont de même signe.

x		0		1		2		4	
$g(x)-4$	+	0	−		−		−	0	+
$f(x)$	+		+	‖	−	0	+		+

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty,0] \cup]1,2] \cup [4,+\infty[$

3) $A(1,0)$; $t \neq 1$

$M(t, f(t)) \in \mathcal{C}_f$

$N(t, 2)$.

Soit H le projeté orthogonal de A sur (MN)

$A \in (O,\vec{i})$ donc $H \in (O\vec{i})$ car $(MN) \perp (O,\vec{i})$.

donc $H(t,0)$

$\mathcal{A}_{AMN} = \dfrac{MN \times AH}{2}$

$MN = |y_N - y_M| = |2-f(t)|$

$AH = |t-1|$.

$MN = |2-f(t)| = \left|\dfrac{2}{t-1}\right|$.

$\mathcal{A}_{AMN} = \dfrac{\left|\frac{2}{t-1}\right| \times |t-1|}{2} = 1$

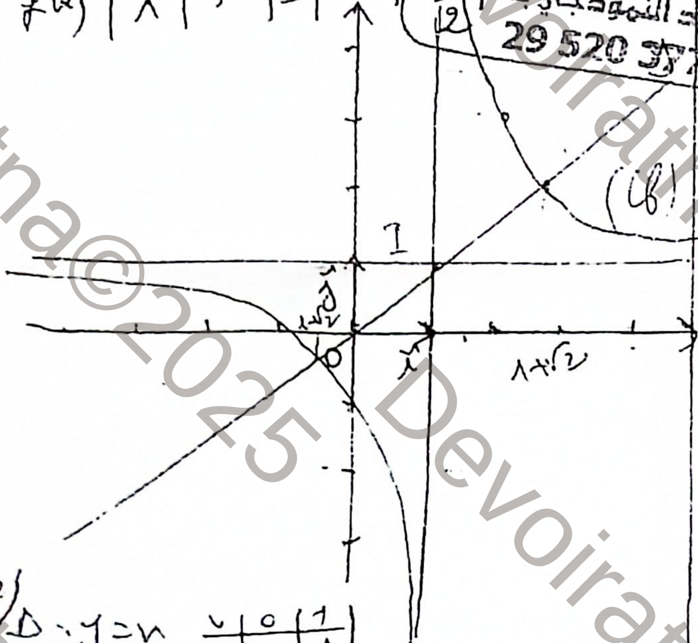
donc $\mathcal{A}_{AMN}$ est constante.

Ex2 1) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

C_f est une hyperbole de centre de symétrie le pt $I(1,1)$ et d'asymptotes les droites d'équations:

$x=1$ et $y=1$

x	1	$3/2$	2	3
$f(x)$	X	5	3	2



2) $\Delta : y=x$

x	0	1
y	0	1

a) les abscisses des pts d'intersection de C_f et Δ sont les solutions de l'équation $f(x)=x$ $(x\neq 1)$

ssi $\frac{x+1}{x-1}=x$

ssi $x+1=x^2-x$

ssi $x^2-2x-1=0$

$\Delta=8$; $x'=\frac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$

$x''=1+\sqrt{2}$

les abscisses sont $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$

b) $\frac{2}{1-x}\leq 1-x$ $(x\neq 1)$

ssi $\frac{2}{x-1}\geq x-1$

ssi $\frac{2}{x-1}+1\geq x$

$\frac{2+x-1}{x-1}\geq x$

ssi $\frac{x+1}{x-1}\geq x$ ssi $f(x)\geq x$

les solutions de cette inéquation sont les abscisses des pts de C_f situés au dessus ou sur Δ

$S_{\mathbb{R}}=]-\infty,1-\sqrt{2}]\cup]1,1+\sqrt{2}]$.

3) $M(x,y)$; $N(y,x)$

$M\in C_f$ ssi $y=\frac{x+1}{x-1}$ où $x\neq 1$

ssi $y(x-1)=x+1$.

ssi $yx-y-x=1$.

ssi $x(y-1)=y+1$. $(y\neq 1)$

ssi $x=\frac{y+1}{y-1}=f(y)$

d'où $N\in C_f$.

Ex3

1) a) $\vec{AD}\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AD)

(AD) : $-4x+4y+c=0$

$A(1,-1)\in(AD)$ donc $4-4+c=0$

$c=0$

(AD) : $4x+4y=0$

$\boxed{(AD) : x+y=0}$

b) $\vec{AD}\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}$ vecteur normal de Δ

Δ : $-4x+4y+c=0$

$B\in\Delta$ donc $-4+20+c=0$ d'où $c=-16$

Suite de l'ex 3 (2017)

1) b) $-4x+4y-16=0$

$\boxed{\Delta : x-y+4=0}$

c) C projeté orthogonal de B sur (AD)

donc $(BC)\perp(AD)$ en C

d'où $\{C\} = \Delta \cap (AD)$

$C(x,y)$ $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y+4=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y=-x \\ 2x+4=0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$

donc $\boxed{C(-2,2)}$

2) $(BC)\perp(AD)$ et $C\in(AD)$ d'où $(BC)\perp(AC)$ donc le triangle ABC est rectangle en C donc il est inscrit dans le cercle de diamètre [AB], soit L son centre : $x_L = \frac{x_A+x_B}{2} = 1$

$y_L = \frac{y_A+y_B}{2} = 2$

$L(1,2)$.

$R = LA = \sqrt{(1-1)^2+(2+1)^2} = 3$

$\boxed{\mathcal{C} : (x-1)^2+(y-2)^2 = 9}$

3) $M(x,y) \in \mathcal{C}'$ ssi $AM^2 = 4BM^2$

ssi $(x-1)^2+(y+1)^2 = 4\left[(x-1)^2+(y-5)^2\right]$

ssi $x^2-2x+1+y^2+2y+1 = 4(x^2-2x+1+y^2-10y+25)$

$3x^2+3y^2-6x-42y+102=0$

ssi $x^2+y^2-2x-14y+34=0$

ssi $(x-1)^2-1+(y-7)^2-49+34=0$

ssi $(x-1)^2+(y-7)^2=16$

$\mathcal{C}'$ est le cercle de centre $I'(1,7)$ et de rayon 4.

$E\in ?\ \mathcal{C}'$: $(5-1)^2+(7-7)^2=16$ donc $E\in\mathcal{C}'$.

b) $(I'E)\perp\Delta'$

$\vec{I'E}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ vecteur normal

$\Delta' : 4x+c=0$

$E\in\Delta'$ d'où $4\times5+c=0$

$c=-20$

$\Delta' : 4x-20=0$

$\boxed{\Delta' : x=5}$

Soit Δ'' l'autre tangente à $\mathcal{C}'$ parallèle à Δ'.

$d(I',\Delta'') = R' = 4$

$\Delta'' : x+c=0$.

$\frac{|1+c|}{\sqrt{1}} = 4$

$1+c=4$ ou $1+c=-4$

$c=3$ ou $c=-5$

$\boxed{\begin{array}{l}\Delta' : x-5=0 \\ \Delta'' : x+3=0\end{array}}$

4) $K\in\mathcal{C}$ donc le triangle AKB est rectangle en K

donc $AK^2+BK^2=AB^2$

$K\in\mathcal{C}$ d'où $AK = 2BK$

$BK = \frac{1}{2}AK$

$AK^2+\frac{1}{4}AK^2 = AB^2$

$\frac{5}{4}AK^2 = AB^2$

$AK^2 = \frac{4}{5}AB^2$

d'où $\boxed{AK = \frac{2}{\sqrt{5}}AB}$