Lycée Pilote Sfax	Devoir de Synthèse N°3	2ème sciences
Le 22/05/2017		2 heures

Exercice 1 : (5 points)

Dans l'annexe ci-jointe, (C_f) est la représentation graphique d'une fonction f définie par :

$f(x) = \frac{ax+b}{cx-1}$

1) En utilisant le graphique, montrer que $f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$.

2) Soit g la fonction définie par : $g(x) = x^2 - 4x + 4$ et (C_g) sa courbe dans le même repère.

a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C_f) et (C_g).

b) Tracer (C_g).

3) Résoudre graphiquement : a) $f(x) \leq g(x)$ b) $(g(x) - 4).f(x) \geq 0$.

4) Soit $A(1,0)$, t un réel différent de 1 et M un point de (C_f) d'abscisse t.

La parallèle à $(O,\vec{j})$ passant par M coupe la droite Δ d'équation $y = 2$ en un point N.

Montrer que l'aire du triangle AMN est constante.

Exercice N°2: (3.5 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

1) Construire (C_f) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2) Soit Δ la droite d'équation $y = x$.

a) Déterminer les abscisses des points d'intersection de (C_f) et Δ.

b) Résoudre graphiquement dans IR, l'inéquation : $\frac{2}{1-x} \leq 1 - x$.

3) Soient $M(x,y)$ et $N(y,x)$ deux points du plan. Montrer que si $M \in (C_f)$ alors $N \in (C_f)$.

Exercice N° 3: (5.5 points)

Soient $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan et les points $A(1,-1)$, $B(1,5)$, $D(-3,3)$ et $E(5,7)$.

1) a) Ecrire une équation cartésienne de la droite (AD).

b) Ecrire une équation cartésienne de Δ la perpendiculaire à (AD) et passant par B.

c) Calculer les coordonnées du point C projeté orthogonal de B sur (AD).

2) Ecrire une équation du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC.

3) Soit l'ensemble $\mathscr{C}' = \{ M(x,y)$ du plan tels que $AM = 2BM \}$.

a) Montrer que $\mathscr{C}'$ est le cercle de centre $I'(1,7)$ et passant par E.

b) Ecrire une équation de Δ' la tangente à $\mathscr{C}'$ au point E.

c) Déterminer l'équation de l'autre tangente au cercle $\mathscr{C}'$ parallèle à Δ'.

4) Soit K un point d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

Sans calculer les coordonnées de K, montrer que $AK = \frac{2AB}{\sqrt{5}}$.

Exercice N°4 : (6 points) 18

Dans la figure ci-dessous ABE est un triangle isocèle en E et ABCD est un carré de centre O situés dans deux plans perpendiculaires.

I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].

1) Montrer que le triangle EIJ est rectangle.

2) Soit H le milieu de [EJ]. Montrer que (OH) est l'axe du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit à ABCD.

3) a) Déterminer le plan médiateur du segment [BD].

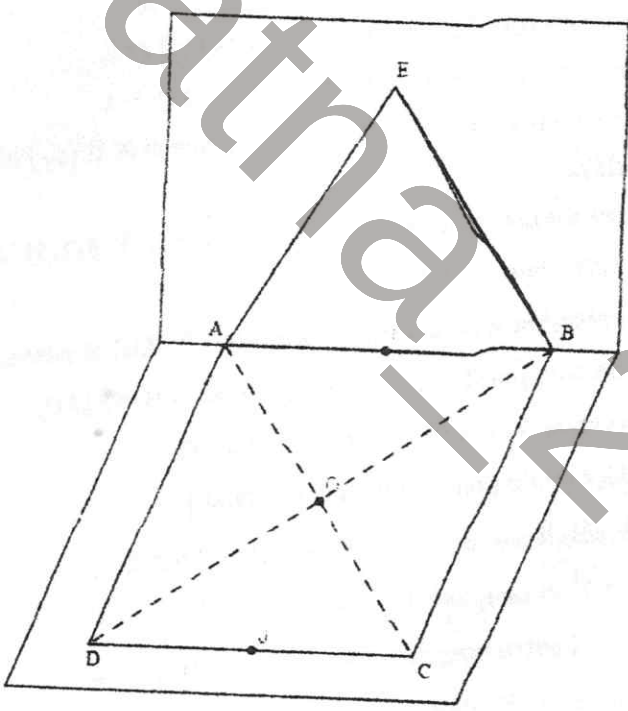
b) Déduire que (AHC) et (ABC) sont perpendiculaires.

4) Soit Δ la droite d'intersection de (AEB) et (AHC). Montrer que Δ est perpendiculaire à (ABC).

5) (CH) coupe Δ en G. Montrer que les quadrilatères AIEG et EGDJ sont des rectangles.

6) On désigne par L et S les centres respectifs de AIEG et EGDJ.

Montrer que (SL) est l'axe du cercle $\mathscr{C}'$ circonscrit à AIEG.

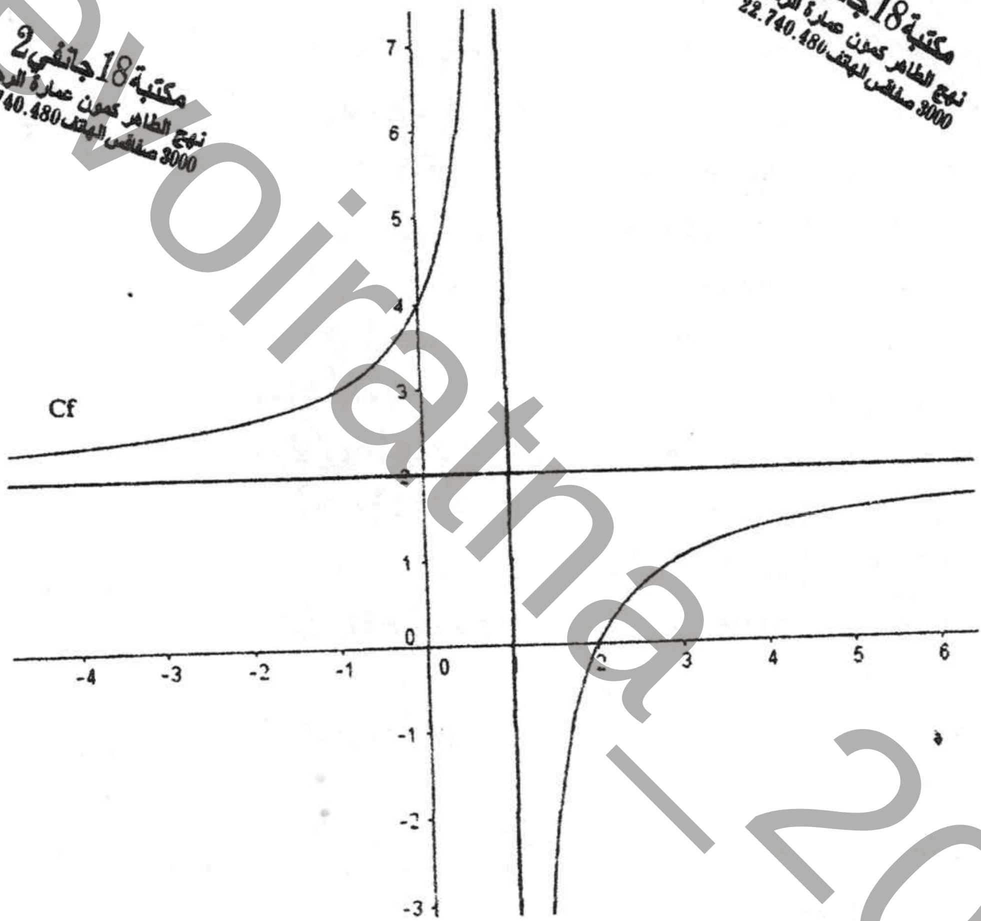


Lycée Pilote Sfax	Devoir de Synthèse N°3	2ème sciences
Le 22/05/2017		2 heures

19

Nom & prénom : ....classe : ....

Exercice 1



(20)

Lycée Pilote Sfax Devoir de synthèse N°3 $2^{ème}$ Sc

Exercice 1

$f(x)=\frac{ax+b}{cx-1}$

1) $x=1$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$ donc $c=1$ d'où $f(x)=\frac{ax+b}{x-1}$

$y=2$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$ donc $a=2$ d'où $f(x)=\frac{2x+b}{x-1}$

$f(2)=0$ donc $\frac{4+b}{1}=0$ d'où $b=-4$. $f(x)=\frac{2x-4}{x-1}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$

2) $\mathscr{C}_g : y=g(x)=x^2-4x+4$

a) $M(x,y)\in\mathscr{C}_f\cap\mathscr{C}_g$ ssi $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$; $y=f(x)$ et $y=g(x)$

$f(x)=g(x)$ éq à $\frac{2x-4}{x-1}=x^2-4x+4$ éq à $\frac{2(x-2)}{x-1}=(x-2)^2$ éq à $2(x-2)=(x-2)^2(x-1)$

éq à $(x-2)^2(x-1)-2(x-2)=0$ éq à $(x-2)\left[(x-2)(x-1)-2\right]=0$ éq $(x-2)(x^2-3x)=0$

éq $(x-2)x(x-3)=0$ éq $x=2$ ou $x=0$ ou $x=3$.

$\mathscr{C}_f\cap\mathscr{C}_g=\{A(2,0); B(0,4); C(3;1)\}$

b) $\mathscr{C}_g : y=g(x)=x^2-4x+4$

3) a) $f(x)\leq g(x)$; $\mathscr{C}_f$ au dessous de $\mathscr{C}_g$. $S_{\mathbb{R}}=]-\infty;0]\cup]1,2]\cup[3,+\infty[$

b) $(g(x)-4)\cdot f(x)\geq 0$ ssi $(g(x)-4\geq 0$ et $f(x)\geq 0)$ ou $(g(x)-4\leq 0$ et $f(x)\leq 0)$

($\mathscr{C}_f$ au dessus de $(O,\vec{i})$ et $\mathscr{C}_g$ au dessus de $y=4$) ou ($\mathscr{C}_f$ au dessous de $(O,\vec{i})$

et $\mathscr{C}_g$ au dessous de $y=4$). $S_{\mathbb{R}}=]-\infty,0]\cup]1,2]\cup[4,+\infty[$

4) $t\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $M\left(t; f(t)=\frac{2t-4}{t-1}\right)$; $N(t,2)$

si $t>1$; $H(t,0)$; $\mathcal{A}(AMN)=\mathcal{A}(AHN)-\mathcal{A}(AHM)=\left(\frac{t-1}{2}\right)\times 2-\left(\frac{t-1}{2}\right)\times\frac{2t-4}{t-1}$

$=t-1-(t-2)=1$.

si $t<1$; $H(t,0)$; $\mathcal{A}(AMN)=\mathcal{A}(AHM)-\mathcal{A}(AHN)=\frac{(1-t)}{2}\times\frac{(2t-4)}{t-1}-\frac{(1-t)}{2}\times 2$

$=(2-t)-(1-t)=1$.

d'où $\mathcal{A}(AMN)=1$ pour tout $t\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Exercice N°2

1) $\mathscr{C}_f : y=\frac{x+1}{x-1}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$

2) a) $M(x,y)\in\Delta\cap\mathscr{C}_f$ ssi $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$; $y=f(x)$ et $y=x$

$f(x)=x$ éq à $\frac{x+1}{x-1}=x$ éq à $x+1=x^2-x$ éq à $x^2-2x-1=0$

éq à. $(x-1)^2-1-1=0$ éq à $(x-1)^2=2$ éq $x-1=\sqrt{2}$ ou $x-1=-\sqrt{2}$ éq à $x=1+\sqrt{2}$ ou $x=1-\sqrt{2}$

$\Delta \cap \mathscr{C}f = \{ A(1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}) ; B(1-\sqrt{2} ; 1-\sqrt{2}) \}$.

b) $\frac{2}{1-x} \leq 1-x$ sig $x \leq 1-\frac{2}{1-x}$ sig $x \leq \frac{x+1}{x-1}$ sig Δ au dessous de $\mathscr{C}f$

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty ; 1-\sqrt{2}] \cup]1 ; 1+\sqrt{2}]$

3) si $M(x,y) \in \mathscr{C}f$ alors $y=\frac{x+1}{x-1}$; $y \neq 1$ car $\frac{x+1}{x-1}=1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$f(y)=\frac{y+1}{y-1}=\left(\frac{2x}{x-1}\right)\times\frac{1}{\left(\frac{2}{x-1}\right)}=x$ donc $N(y,x)\in\mathscr{C}f$

Exercice N°3

1)a) $\vec{AD}\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$ donc $(AD) : 4x+4y+c=0$; $A(1,-1)\in(AD)$ donc $4-4+c=0$ d'où $c=0$

$(AD) : 4x+4y=0$ Soit $(AD) : x+y=0$

b) $M(x,y)\in\Delta$ sig $\vec{AD}\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{BM}\begin{pmatrix}x-1\\y-5\end{pmatrix}$ sont orthogonaux sig $-4(x-1)+4(y-5)=0$

sig $-4x+4y-16=0$; $\Delta : -4x+4y-16=0$ Soit $\Delta : x-y+4=0$

c) C est le projeté orthogonal de B sur (AD) donc $C=\Delta\cap(AD)$.

$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=-4 \end{cases}$ éq $\begin{cases} -x=+y \\ 2x=-4 \end{cases}$ éq $\begin{cases} y=2 \\ x=-2 \end{cases}$ $C(-2,+2)$.

2) $\mathscr{C}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC rectangle en C. $I=A*B$ $(1;2)$

est le centre de $\mathscr{C}$. $R=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{0^2+6^2}=\frac{6}{2}=3$.

$\mathscr{C} : (x-1)^2+(y-2)^2=3^2=9$

3)a) $M(x,y)\in\mathscr{C}'$ éq à $AM=2BM$ éq à $AM^2=4BM^2$ éq à

$(x-1)^2+(y+1)^2=4\left((x-1)^2+(y-5)^2\right)$ éq à $x^2-2x+1+y^2+2y+1=4x^2-8x+4+4y^2-40y+100$

éq à $3x^2-6x+3y^2-42y+102=0$ éq à $x^2-2x+y^2-14y+34=0$ éq à

$(x-1)^2-1+(y-7)^2-49+34=0$ éq $(x-1)^2+(y-7)^2=16=4^2$.

$\mathscr{C}'\,(I'(1,7) ; R'=4)$. $(5-1)^2+(7-7)^2=4^2$ donc $E\in\mathscr{C}'$

b) $M(x,y)\in\Delta'$ la tangente à $\mathscr{C}'$ au point E éq à $\vec{I'E}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{EM}\begin{pmatrix}x-5\\y-7\end{pmatrix}$ sont

orthogonaux éq à $4(x-5)=0$ $\Delta' : x=5$

c) $S_{I'}(E)=E'$; $x_{E'}=2x_{I'}-x_E=2-5=-3$; $y_{E'}=2y_{I'}-y_E=14-7=7$; $E'(-3,7)$.

la parallèle à Δ' passant à E' d'équation $x=-3$ est tangente à $\mathscr{C}'$.

4) $K \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$; on a : ABK est rectangle en K, $AB^2 = AK^2 + BK^2$

on a : $AK = 2BK$ donc $BK = \frac{1}{2}AK$; $AB^2 = AK^2 + (\frac{1}{2}AK)^2 = \frac{5}{4}AK^2$

$AK^2 = \frac{4}{5}AB^2$ d'où $AK = \frac{2}{\sqrt{5}}AB$.

Exercice 4

1) ABE est isocèle en E ; $I = A*B$ donc $(EI) \perp (AB)$; (ABE) et $(ABCD)$ sont deux plans perpendiculaires sécants suivant (AB) ; donc $(EI) \perp (ABCD)$

$(IJ) \subset (ABCD)$ donc $(EI) \perp (JI)$ d'où EIJ est rectangle en I

2) $H = E*J$ donc H est le centre du cercle circonscrit au triangle EIJ.

$ABCD$ est un carré de centre O ; $O = A*C = B*D$, $AI = BI = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}DC = JC$ et $(AI) // (JC)$ donc $AICJ$ est un parallélogramme d'où $O = I*J$; $H = E*J$ donc $(OH) // (IE)$

$(IE) \perp (ABCD)$ donc $(OH) \perp (ABCD)$, $O \neq H$ donc (OH) est l'axe du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à $ABCD$; $\mathcal{C}(O, OA)$.

3) a) $CB = CD$; $AB = AD$; $H \in$ l'axe du cercle $\mathcal{C}$ donc $HB = HD$; A, C et H ne sont pas alignés donc (ACH) est le plan médiateur du segment $[BD]$.

b) $(OB) \perp (OC)$ car $ABCD$ est un carré ; $(OB) \perp (ACH)$; $(OB) \subset (ABC)$ donc $(ACH) \perp (ABC)$.

4) $\Delta // (EI)$; $A \in \Delta$; $\Delta \subset (ABE)$; $\Delta \perp (AB) = (ABE) \cap (ABC)$; donc $\Delta // (EI)$

$(EI) // (OH)$ d'où $\Delta // (OH)$; $A \in \Delta$ d'où $\Delta \subset (OHA) = (AHC)$.

d'où $\Delta = (ABE) \cap (AHC)$ et $\Delta \perp (ABC)$.

5) $(OH) // (\Delta)$; $H = E*J$; $O = A*C$ donc $AG = 2OH$; $H = E*J$, $O = I*J$ donc $2OH = IE$ d'où $AG = IE$; $(IE) // (AG)$; $(AI) \perp (IE)$ donc $AIEG$ est un rectangle

$(DJ) // (AI)$; $(AI) // (EG)$ donc $(DJ) // (GE)$; $DJ = AI$; $AI = GE$ donc $EGDI$ est un parallélogramme

EID est rectangle en I ; $ED^2 = EI^2 + DI^2$; AGJ est rectangle en A, $JG^2 = AG^2 + AJ^2$

$EI = AG$; $DI^2 = AD^2 + (\frac{1}{2}AB)^2 = \frac{5}{4}AB^2$; $JA^2 = AD^2 + (\frac{1}{2}DC)^2 = \frac{5}{4}AB^2$ donc $AJ = DI$ d'où

$ED = GJ$ et par suite $EGDJ$ est un rectangle.

6) Soit Δ' l'axe de $\mathscr{C}'$ circonscrit à AIEG.

On a : L le centre $\mathscr{C}'$ donc Δ' passe par L.

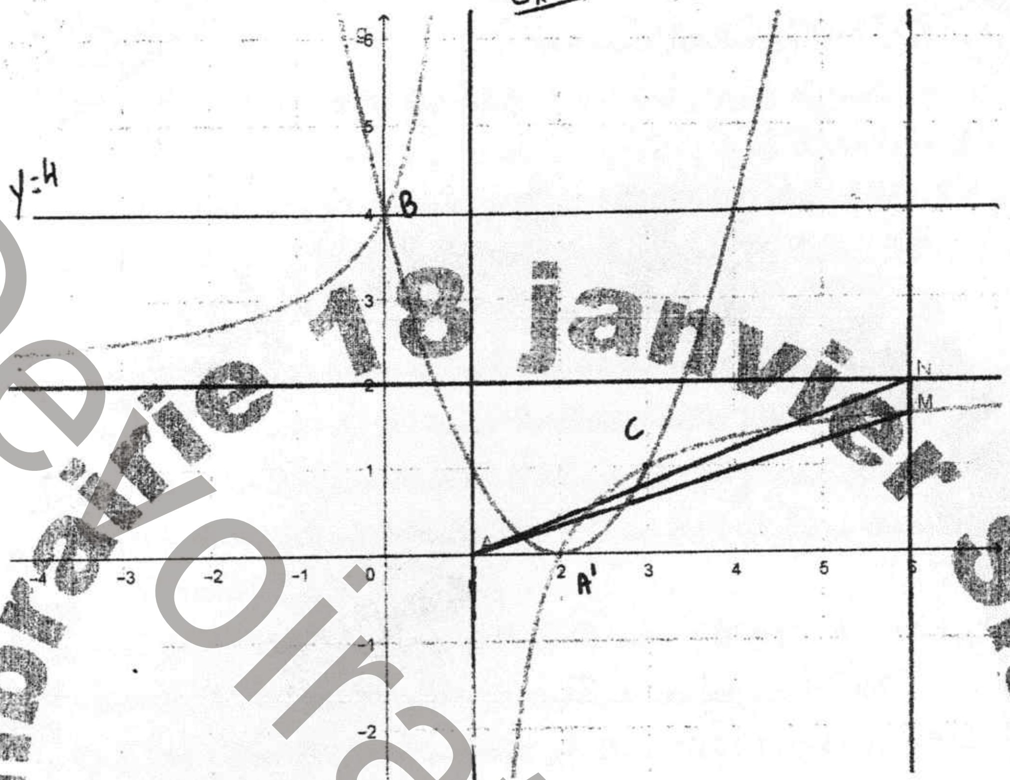
GAJ est rectangle en A ; $S = G * J$ donc $SA = SG$

GIJ est rectangle en I ; $S = G * J$ donc $SI = SG$

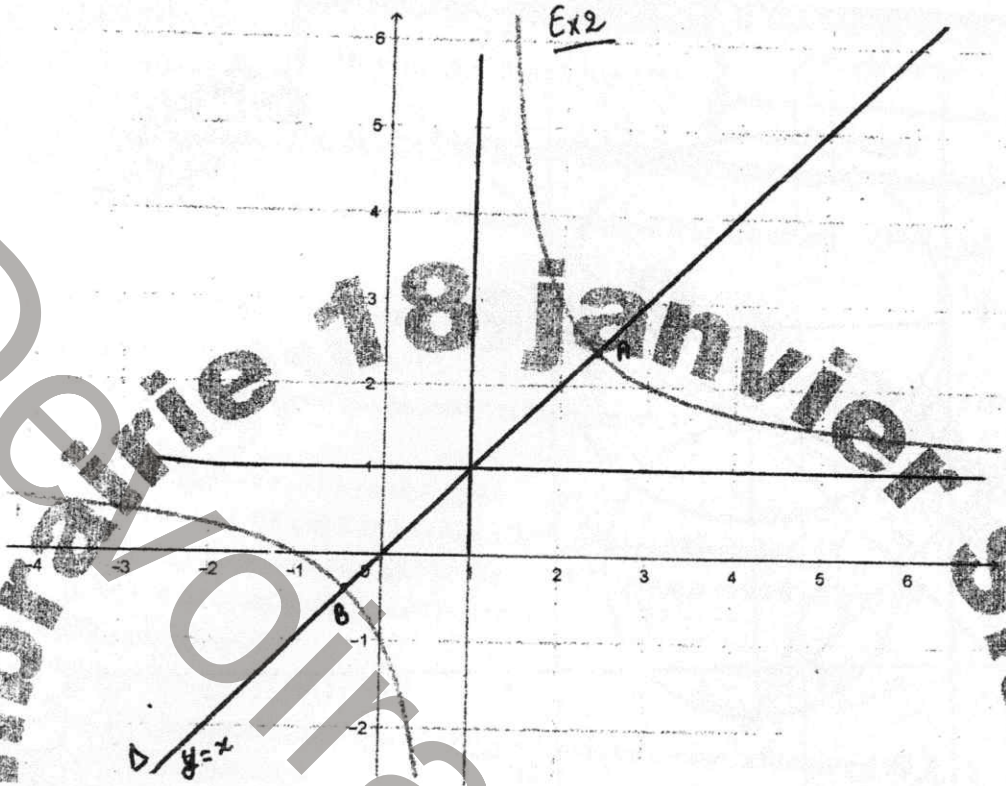
$SA = SI = SG$ donc $S \in \Delta'$, $L \neq S$ donc $\Delta' = (SL)$.

24

Ex1



25



Ex3