copie copie

LYCEE PILOTE DE SOUSSE	Devoir de synthèse N°3 MATHEMATIQUES	CLASSE : $2^{ème}S$ DUREE : 2 heures

58 059 297

EXERCICE N°1 (8 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $R = (O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{-2x+1}{x-2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère R.

a) Vérifier que : pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, on a $f(x) = -2 - \frac{3}{x-2}$

b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

c) Tracer la courbe (C).

2/ Soient g et g_1 les fonctions définies respectivement par : $g(x) = \sqrt{x+3} - 1$ et $g_1(x) = \sqrt{x+3}$

a) Dresser le tableau de variation de g_1.

b) Tracer la courbe représentative (C') de g dans le repère R.

c) Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection des courbes (C) et (C').

d) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \le g(x)$.

3/ Soit h la fonction définie par : $h(x) = \frac{-2x+1}{|x-2|}$ et soit (Γ) sa courbe représentative dans le repère R.

a) Tracer la courbe (Γ) à partir de la courbe (C).

b) Dresser alors le tableau de variation de h.

4/ a) Tracer la parabole (P) d'équation : $y = -\frac{1}{3}x^2 - 2$.

b) En déduire que l'équation : $x^2|x-2| + 6(|x-2| - x) + 3 = 0$, admet deux solutions distinctes x_1 et x_2.
Donner la valeur exacte de l'une de ces solutions et un encadrement d'amplitude 0,25 de l'autre.

EXERCICE N°2 (5 points)

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $R = (O,\vec{i},\vec{j})$.

Soient m un paramètre réel et $(C_m) = \{M(x,y) \in P \ / \ x^2 + y^2 - 2mx + 2(m-2)y = 0\}$

1/ Montrer que pour tout m de $\mathbb{R}$, (C_m) est un cercle dont on précisera les coordonnées de son centre I_m et la valeur de son rayon R_m

2/ a) Montrer que les cercles (C_m) passent par deux points fixes A et B dont on donnera les coordonnées.

b) En déduire que les points I_m sont sur une droite fixe dont on donnera une équation cartésienne.

3/ Soit (D) la droite d'équation : $x + 3y - 18 = 0$.

a) Montrer qu'il existe deux cercles (C_{m_1}) et (C_{m_2}) tangents à la droite (D), on prendra $m_1 < m_2$.
Tracer les cercles (C_{m_1}) et (C_{m_2}) et la droite (D).

b) Soit I le point d'intersection de la droite (D) et de la droite Δ d'équation : $x + y - 2 = 0$.
Montrer que (C_{m_2}) est l'image de (C_{m_1}) par une homothétie H de centre I dont on précisera le rapport.

EXERCICE N°3 (7 points)

On donne dans l'espace deux triangles équilatéraux ABC et ABD situés dans deux plans perpendiculaires P et Q.
On désigne par I, J, K, L, M, et N les milieux respectifs des segments [AB], [CD], [CA], [CB], [DB] et [DA] et on pose $AB = a$, $a \in \mathbb{R}_+^*$

1/ a) Montrer que la droite (DI) est perpendiculaire au plan P.
b) Déterminer la nature du triangle ICD puis calculer DC en fonction de a.

2/ a) Montrer que la droite (AB) est perpendiculaire au plan (IDC).
b) En déduire que la droite (IJ) est la perpendiculaire commune des droites (AB) et (DC).

3/ Montrer que le quadrilatère KLMN est un rectangle.

4/ Soit R le plan passant par K et parallèle aux droites (AB) et (DC).
a) Déterminer l'intersection du plan R avec chacun des plans P et Q.
b) Montrer que R est le plan médiateur du segment [IJ].

5/ Calculer en fonction de a le volume de la pyramide JKLMN.

6/ Soit Δ l'axe du cercle circonscrit au triangle ABC et soit F le milieu du segment [MN].
a) Montrer que Δ est contenue dans le plan (IDC).
b) Soit E le point d'intersection de Δ et R, montrer que E est le centre de gravité du triangle FKL.

18 JANVIER
Rue Tahar Kmmoun Imm Rahma
SFAX 3000-Tél:22.740.480

Devoir a 2015 COPIE PILOTE SOUSSE 58 05 92 97

https://www.facebook.com/CopiePilotee
58 059 297
copie copie

58 059 297 58 059 297

Exn°1:

1) a) $-2-\frac{3}{x-2} = \frac{-2(x-2)-3}{x-2}$

$= \frac{-2x+4-3}{x-2} = \frac{-2x+1}{x-2}$

$= f(x)$

d'où $f(x) = -2 - \frac{3}{x-2}$ $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$

b) soit a et $b \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$

tq $a \leq b$

$a-2 \leq b-2$

$\frac{1}{a-2} \geq \frac{1}{b-2}$

$-\frac{3}{a-2} \leq -\frac{3}{b-2}$

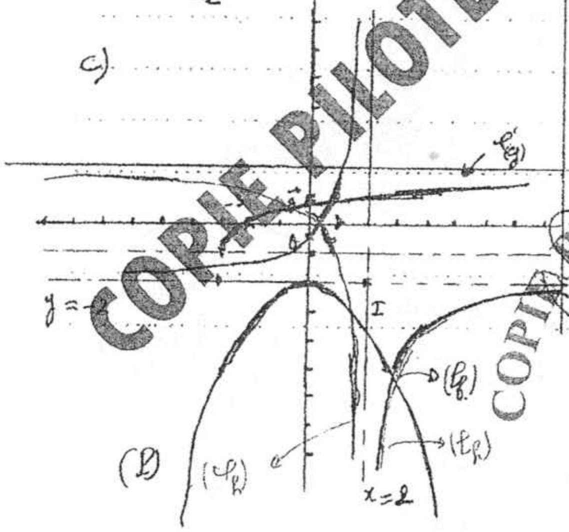
$-2-\frac{3}{a-2} \leq -2-\frac{3}{b-2}$

$f(a) \leq f(b)$

d'où f est croissante sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f	-2	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	-2

c)



$\mathcal{C}_f$ est un hyperbole de centre $I(2;-2)$ et d'asymptote $x=2$ et $y=-2$

2°) $g(x) = \sqrt{x+3} - 1$

$g_1(x) = \sqrt{x+3}$

a) $g_1(x) = \sqrt{x+3}$

$D_{g_1} = \{x\in\mathbb{R} \,/\, x+3 \geq 0\}$

$x+3 \geq 0$ ssi $x \geq -3$

$D_g = [-3,+\infty[$

soit a et $b \in [-3,+\infty[$ tq $a \leq b$

$a+3 \leq b+3$

$\sqrt{a+3} \leq \sqrt{b+3}$

$f(a) \leq f(b)$

d'où f est croissante sur $[-3,+\infty[$

x	-3		$+\infty$
	0	↗	$+\infty$

b) soit $(\mathcal{C}_1)$ est la représentation graphique de g_1

et $(\mathcal{C}')$ ... de g

donc $(\mathcal{C}') = t_{-\vec{j}}(\mathcal{C}_1)$

c) $f(x) = g(x)$ ssi $\frac{-2x+1}{x-2} = \sqrt{x+3} - 1$

ssi $\frac{-2x+1}{x-2} + 1 = \sqrt{x+3}$

$\frac{-2x+1+x-2}{x-2} = \sqrt{x+3}$

$\frac{-x-1}{x-2} = \sqrt{x+3}$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$-x-1$	$+$	0 $-$	$-$	
$x-2$	$-$	$-$	0 $+$	
$\frac{-x-1}{x-2}$	$-$	0 $+$	‖ $-$	

$x \in [-1,2[$

مكتبة 18 جانفي عمارة الرحمة (نهج الطاهر كمون أمام البلمريوم 4- الهاتف : 22 740 485
SFAX نهج الطاهر كمون SFAX مكتبة 18 جانفي SFAX
https://www.facebook.com/CopiePilotee
58 059 297

copie copie
58 059 297

2°) a) $M(x,y) \in (C_m)$

ssi $2mx + 2(m-2)y = 0$

ssi $x^2+y^2-4y+m(-2x+2y)=0$

$\begin{cases} x^2+y^2-4y=0 \\ -2x+2y=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+x^2-4x=0 \\ x=y \end{cases}$

$\begin{cases} 2x^2-4x=0 \\ x=y \end{cases}$ $\begin{cases} 2x(x-2)=0 \\ x=y \end{cases}$

$\begin{cases} x=0 \\ y=x=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2=0 \\ y=x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

d'où (C_m) passent par deux points fixes $A(0,0)$ et $B(2,2)$

b) on a : $A(0,0)$ et $B(2,2)$ sont deux points fixes de (C_m)

donc $I_mA = I_mB$

d'où $I_m \in$ méd $[AB]$

$\vec{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite fixe (Δ)

(Δ) : $2x+2y+c=0$

Le milieu I de [AB] de coordonnées $\left(\frac{2+0}{2}=1 ; \frac{2+0}{2}=1\right)$

$I(1,1)$

$I \in (\Delta)$ ssi $2\times1+2\times1+c=0$

$c+4=0$ donc $c=-4$

(Δ) : $2x+2y-4=0$

$\boxed{(\Delta) : x+y-2=0}$

3°) a) (D) : $x+3y-18=0$

on a : $I_m(m ; -m+2)$

(D) est tangente à (C_m) ssi

$d(I_m,(D)) = R_m$

ssi $\dfrac{|m+3(-m+2)-18|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \sqrt{m^2+(m-2)^2}$

ssi $|-2m-12| = \sqrt{10}\sqrt{m^2+(m-2)^2}$

ssi $|2m+12|^2 = \left(\sqrt{10}\sqrt{m^2+(m-2)^2}\right)^2$

ssi $4m^2+48m+144 = 10m^2+10(m-2)^2$

ssi $4m^2+48m+144 = 10m^2+10(m^2-4m+4)$

ssi $4m^2-10m^2-10m^2+48m+40m+144-40=0$

ssi $-16m^2+88m+104=0$

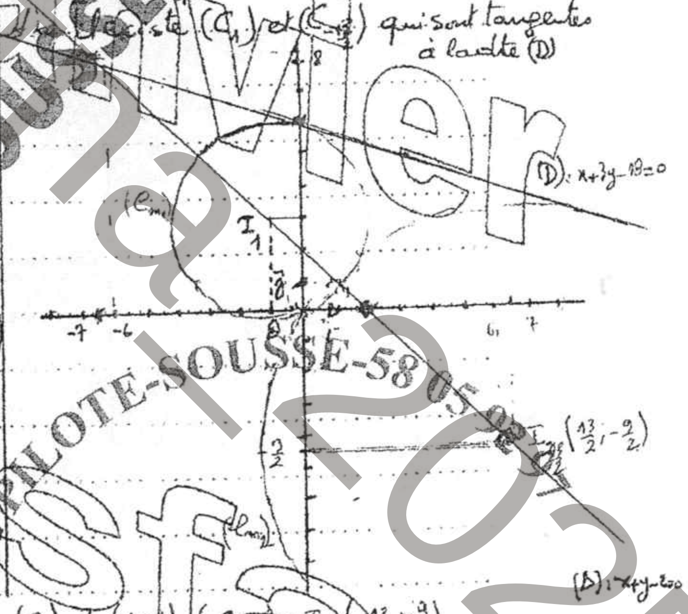
ssi $-4m^2+22m+26=0$

$-4-22+26=0$

$m_1=-1$

$m_2=\frac{-26}{-4}=\frac{13}{2}$

d'où il existe (C_1) et $(C_{\frac{13}{2}})$ qui sont tangentes à la droite (D)



(C_1) : $I_1(-1 ; 3)$ $\quad R_1=\sqrt{10}$

$(C_{\frac{13}{2}})$: $I_{\frac{13}{2}}\left(\frac{13}{2} ; -\frac{9}{2}\right)$

$R_{\frac{13}{2}} = \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{250}}{2} = \frac{5\sqrt{10}}{2}$

COPIE PILOTE-SOUSSE-58 05 92 97
Devoir.tn 2025
18 JANVIER Rue Tahar Kmmoun Imm Rahma SFAX 3000-Tél:22.740.480
مكتبة 18 جانفي عمارة الرحمة (نهج الطاهر كمون أمام البلمريوم 4 – الهاتف : 22 740 485
SFAX
https://www.facebook.com/
58 059 297
copie copie

58 059 297

(65)

d'où $[IJ]$ est la perpendiculaire commune de (AB) et (CD)

3°) on a : $(KL) // (AB)$ (Ds le T. ABC, mais K = A*C et L = B*C)

et $(MN) // (AB)$ (Ds le T. ABD on a M = A*D et N = B*D)

d'où $(KL) // (MN)$ et $KL = MN = \frac{1}{2} AB$

et on a : $(AB) \perp (ICD)$ et $(CD) \subset (ICD)$

d'où $(AB) \perp (CD)$

et on a $(KL) // (AB)$

et $(LM) // (CD)$ (Ds le T. BCD on a L = B*C et M = B*D)

d'où $(KL) \perp (LM)$

donc on a : $(KL) // (MN)$ et $KL = MN$

et $(KL) \perp (LM)$

D'où KLMN est un rectangle

4°) a) on a : $(AB) // (KLM)$ car $(AB) // (KL)$ et $(AB) // (MN)$

et $(CD) // (KLM)$ car $(LM) // (CD)$ et $(KN) // (CD)$

d'où $R = (KLM)$

$R \cap P = (KL)$ et $R \cap Q = (MN)$

b) on a $LJ = LB$ (car [illegible] et $L = C*B$)

et $LI = LB$ (car CBI [illegible] et $L = C*B$)

d'où $LI = LJ$ donc $L \in$ plan médiateur $[IJ]$

et on a : $(IJ) \perp (AB)$

et $(AB) // (R)$

d'où $(IJ) \perp (R)$

or $L \in (R)$

d'où (R) est le plan médiateur de $[IJ]$

c) [illegible] (R) est le plan médiateur de $[IJ]$ [illegible] (KLM)

d'où la hauteur de la pyramide JKLMN est IE

et $IE = \frac{1}{2} IJ = \ldots = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

$A_{KLMN} = KL \times LM$ ($KL = \frac{1}{2} AB = \frac{a}{2}$, $LM = \frac{1}{2} CD = \ldots$)

$= \frac{a}{2} \times \frac{a\sqrt{6}}{4} = \frac{a^2\sqrt{6}}{8}$

$V_{JKLMN} = \frac{1}{3} \times \frac{a\sqrt{6}}{4} \times \frac{a^2\sqrt{6}}{8}$

$= \frac{a^3 \times 6}{96} = \frac{a^3}{16}$

d'où $V_{JKLMN} = \frac{a^3}{16}$

5°) a) le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est [illegible] $\in (IC)$

et on a : (Δ) est [illegible] au cercle circonscrit au triangle ABC [illegible] $(\Delta) \perp ABC$

$(\Delta) \perp (IC)$

or $(ICD) \perp (ABC)$ [illegible] $(IC) \subset (ICD)$

donc $(\Delta) \subset (ICD)$

b) on a : $\{E\} = (\Delta) \cap (FH)$ et $[FH]$ est la médiane issue de F pour le triangle FKL

Dans le triangle HIF on a,

$(\theta E) // (IF)$ et $\theta \in [HI]$ et $E \in [HF]$

d'après Th de Thalès on a : $\frac{H\theta}{HI} = \frac{HE}{HF}$

on a : θ est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et $I = A*B$

مكتبة 18 جانفي عمارة الرحمة (نهج الطاهر كمون أمام البلمريوم 4 – الهاتف : 22 740 485
SFAX

https://www.facebook.com/CopiePilotee

copie pilote

(66)

58 059 297

et $H = I*C$

or $IC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ donc $HI = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

$\theta I = \frac{1}{3} CI = \frac{1}{3} \times a\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta I = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$H\theta = HI - \theta I$

$= \frac{a\sqrt{3}}{4} - \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{12}$

$$\frac{H\theta}{HI} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{12}}{\frac{a\sqrt{3}}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{12_3} \times \frac{4}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

d'où $\frac{HE}{HF} = \frac{H\theta}{HI} = \frac{1}{3}$

donc $HE = \frac{1}{3} HF$

$FE = FH - HE$

$= FH - \frac{1}{3} FH = \frac{2}{3} FH$

d'où $FE = \frac{2}{3} FH$

Enfin : E est centre de gravité du triangle FKL

58 059 297

copie pilote

Devoirat Sousse 58 059 297 | 2025