	LYCEE PILOTE DE SOUSSE 58 059 297 Date : 09 / 06 / 2021	Devoir de synthèse N°3 MATHEMATIQUES	CLASSE : 2Sc4,7 et 11 58 059 297 Durée : 2 heures

Exercice 1 : (6 points)

Dans la feuille annexe on a tracé, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. , la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x-b}$ où b est un réel.

1) En utilisant le graphique :

a) Préciser le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f ainsi que son sens de variation.

b) Montrer que b = 1.

2) Soit Δ la droite d'équation $y=\frac{1}{2}(x-1)$.

a) Déterminer l'intersection de Δ et $\mathscr{C}_f$.

b) Résoudre graphiquement dans l'intervalle $[1,+\infty[$ l'inéquation $x^2-6x+5<0$.

3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-2x$.

On désigne par $\mathscr{C}_g$ la représentation graphique de g dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Vérifier que pour tout réel x, on a $f(x)=(x-1)^2-1$.

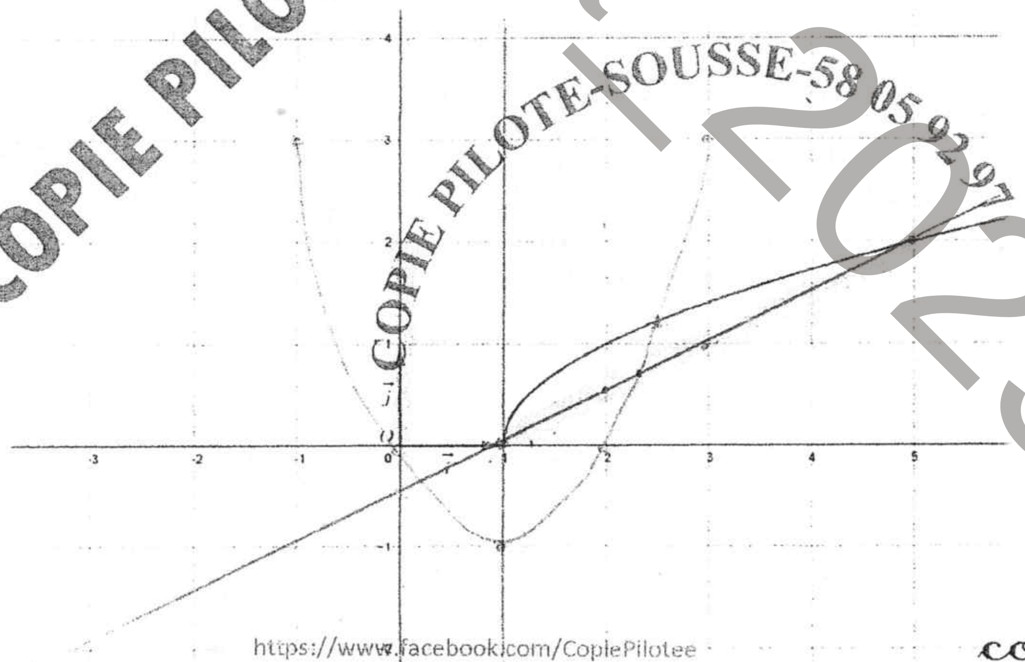
b) Etudier les variations de g sur chacun des intervalles $]-\infty,1]$ et $[1,+\infty[$.

c) Déterminer le sommet S et l'axe D de la parabole $\mathscr{C}_g$ puis la tracer sur la feuille annexe.

4) On considère l'équation (E) : $\sqrt{x-1}-x^2+2x=0$.

a) Vérifier que si x est solution de (E) alors $x\in[2,+\infty[$.

b) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation (E).



Exercice 2 : (6 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.

2) Déterminer le sens de variation de f sur chacun des intervalles $]-\infty, 2[$ et $]2, +\infty[$.

3) a) Préciser les coordonnées du centre de symétrie I de $\mathscr{C}_f$ et donner des équations de ses asymptotes.

b) Tracer $\mathscr{C}_f$.

4) Soit Δ la droite d'équation réduite $y = -x + 1$.

a) Déterminer $\Delta \cap \mathscr{C}_f$.

b) Soit la droite $D_k : y = k(x-1)$ où k est un réel différent de -1.

Déterminer suivant les valeurs de k, le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et D_k.

5) Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{|x|-1}{|x|-2}$.

a) Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_g$ de la fonction g.

b) Montrer que g est paire.

c) Tracer dans le même repère la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de la fonction g.

d) En utilisant le graphique, dresser le tableau de variation de g.

Exercice 3 : (8 points)

Le plan est muni d' un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.. On donne les points A(3,1) et B(1,0).

1) a) Ecrire une équation cartésienne de la droite $\Delta = (AB)$.

b) La droite Δ coupe l'axe $(O, \vec{j})$ en un point C. Déterminer les coordonnées de C.

2) a) Calculer la distance du point O à la droite Δ.

b) En déduire l'aire du triangle OAB.

3) Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble de points M(x,y) vérifiant $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$.

a) Montrer que $\mathscr{C}$ est un cercle de centre A et de rayon $\sqrt{5}$.

b) Vérifier que le cercle $\mathscr{C}$ passe par B. Construire le cercle $\mathscr{C}$.

c) Déterminer l'intersection du cercle $\mathscr{C}$ et la droite $(O, \vec{i})$.

4) Soit m un réel et Δ_m la droite parallèle à (AB) et passant par le point I(m,0).

a) Montrer que Δ_m a pour équation $-x + 2y + m = 0$.

b) Montrer que $d(A, \Delta_m) = \frac{|m-1|}{\sqrt{5}}$.

c) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles Δ_m est tangente à $\mathscr{C}$.

09/06/2021

Correction du devoir de synthèse N°3 Mathématiques

2 Sc 4, 5 et 11

Exercice 1 : $f(x) = \sqrt{x-b}$, $b \in \mathbb{R}$

1) a) D'après le graphique $D_f = [1, +\infty[$

$f(1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-b} = 0 \Leftrightarrow 1-b=0$

$\Rightarrow \boxed{b=1}$

$\Delta : y = \frac{1}{2}(x-1)$

$M(x,y) \in \Delta \cap \mathcal{C}_f \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}(x-1) \\ y = \sqrt{x-1} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}(x-1) \\ \frac{1}{2}(x-1) = \sqrt{x-1} \end{cases}$

$\begin{cases} y = \frac{1}{2}(x-1) \\ \frac{1}{4}(x-1)^2 = x-1 \end{cases}$

si $x = 1 \Rightarrow y = 0$

si $x \neq 1$ $\frac{1}{4}(x-1) = 1 \Leftrightarrow x-1 = 4$

$\Rightarrow x = 5$

$\Rightarrow y = 2$

donc $\Delta \cap \mathcal{C}_f = \{(1,0), (5,2)\}$

$x \in [1, +\infty[$

$x^2 - 6x + 5 < 0$

$f(x) - y = \sqrt{x-1} - \frac{1}{2}(x-1)$

$= \frac{(\sqrt{x-1} - \frac{1}{2}(x-1))(\sqrt{x-1} + \frac{1}{2}(x-1))}{\sqrt{x-1} + \frac{1}{2}(x-1)}$

$= \frac{x-1-\frac{1}{4}(x-1)^2}{\sqrt{x-1} + \frac{1}{2}(x-1)}$

$= \frac{x - 1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}}{\sqrt{x-1} + \frac{1}{2}(x-1)}$

$= \frac{-4x + 4 + x^2 - 2x + 1}{-4[\sqrt{x-1} + \frac{1}{2}(x-1)]}$

$= \frac{x^2 - 6x + 5}{-4[\sqrt{x-1} + \frac{1}{2}(x-1)]}$

$x^2 - 6x + 5 < 0$

$\Rightarrow f(x) - y > 0$

$\Rightarrow f(x) > y$

$\Rightarrow \mathcal{C}$ est au dessus de Δ

$\Rightarrow x \in]1, 5[\Rightarrow S_{\mathbb{R}} =]1, 5[$

3) a) $g(x) = x^2 - 2x$

$g(x) = x^2 - 2x + 1 - 1$

$= (x-1)^2 - 1$

b) soient a et $b \in]-\infty, 1]$ tq $a \leq b$

$g(b) - g(a) = (b-1)^2 - 1 - (a-1)^2 + 1$

$= (b-1)^2 - (a-1)^2$

$= [b-1-(a-1)](b-1+a-1)$

$= (b-a)(a+b-2)$

$a \leq 1$
$b \leq 1$ $\Rightarrow a+b \leq 2$

donc $g(b) - g(a) \leq 0 \Rightarrow g(b) \leq g(a)$

$\Rightarrow g$ est décroissante sur $]-\infty, 1]$

* Soient a et $b \in [1, +\infty[$ tq $a \leq b$

$g(b) - g(a) = (b-a)(a+b-2)$

$a \geq 1$
$b \geq 1$ $\Rightarrow a+b \geq 2$

$\Rightarrow g(b) - g(a) \geq$

$\Rightarrow g(b) \geq g(a)$

$\Rightarrow g$ est croissante sur $[1, +\infty[$

) D'après le tableau de valeur suivant

x	-1	0	1	2	3
$g(x)$	3	0	-1	0	3

$S(1,-1)$ est le sommet de $\mathscr{C}_g$

et $D: x = 1$ est l'axe de la parabole $\mathscr{C}_g$.

) (E) : $\sqrt{x-1} - x^2 + 2x = 0$

a) $\sqrt{x-1} - x^2 + 2x = 0$

$\Rightarrow f(x) - g(x) = 0$

$\Rightarrow f(x) = g(x)$

~~Si~~ x solution de E

$\Rightarrow f(x) = g(x)$

$\Rightarrow M(x,y) \in \mathscr{C}_f \cap \mathscr{C}_g$

$\Rightarrow x \in [2, +\infty[$

b) Graphiquement (E) admet une seule solution $x \in [2, +\infty[$

Exercice

$f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$

) f existe si et seulement si $x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

) $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{x-2+1}{x-2}$

$= 1 + \dfrac{1}{x-2}$

soient $a, b \in]-\infty, 2[$ tq $a \leq b$

$f(b) - f(a) = 1 + \dfrac{1}{b-2} - (1 + \dfrac{1}{a-2})$

$= \dfrac{1}{b-2} - \dfrac{1}{a-2}$

$= \dfrac{a-2-(b-2)}{(b-2)(a-2)}$

$= \dfrac{a-b}{(b-2)(a-2)} \leq 0$

$\Rightarrow f(b) \leq f(a)$

$\Rightarrow f$ est décroissante.

(*) si a et $b \in]2, +\infty[$ tq $a \leq b$

$f(b) - f(a) = \dfrac{a-b}{(b-2)(a-2)} \leq 0$

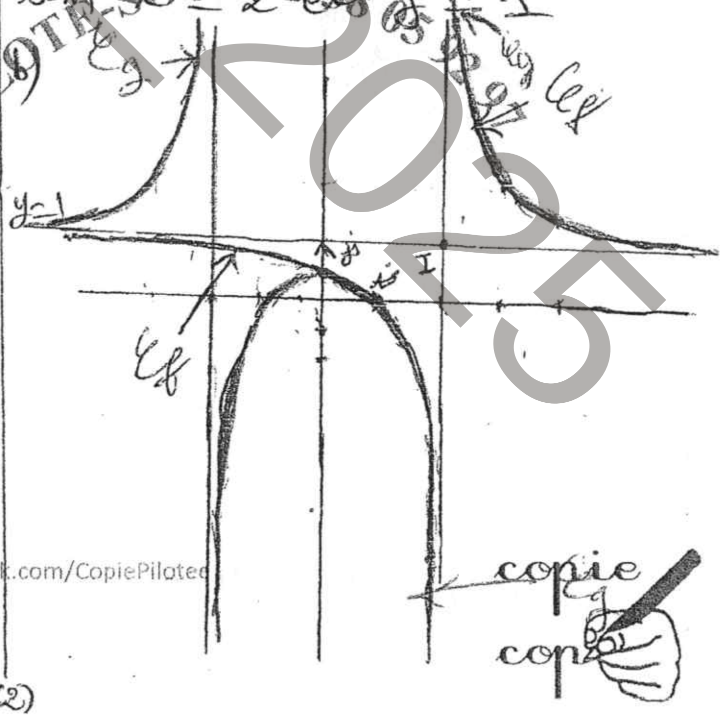
$\Rightarrow f$ est décroissante sur $]2, +\infty[$.

3) a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

Donc $I(2,1)$ est le centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

et les équations de ses asymptotes sont $x = 2$ et $y = 1$

b)



$\Delta : y = -x + 1$

$M(x,y) \in \Delta \cap \mathcal{C}_f$

$\Rightarrow \begin{cases} y = -x+1 \\ y = \frac{x-1}{x-2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = -x+1 \\ -x+1 = \frac{x-1}{x-2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = -x+1 \\ (-x+1)(x-2) = x-1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = -x+1 \\ -x^2+2x+x-2-x+1=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = -x+1 \\ -x^2+2x-1=0 \end{cases}$

$a+b+c = -1+2+(-1)=0$

$\Rightarrow x_1 = 1$ et $x_2 = 1$

c-à-d $\begin{cases} y = -1+1=0 \\ x = 1 \end{cases}$

donc le point $(1,0)$ est l'intersection de Δ et $\mathcal{C}_f$ autrement dit

$\Delta \cap \mathcal{C}_f = \{(1,0)\}$.

) $D_k : y = k(x-1)$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$M(x,y) \in \mathcal{C}_f \cap D_k$

$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x-1}{x-2} \\ y = k(x-1) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x-1}{x-2} \\ \frac{x-1}{x-2} = k(x-1) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x-1}{x-2} \\ x-1 = k(x-1)(x-2) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x-1}{x-2} \\ x-1 = k(x^2-2x-x+2) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x-1}{x-2} \\ kx^2-3kx+2k-x+1=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x-1}{x-2} \\ kx^2-(3k+1)x+2k+1=0 \end{cases}$

on a : $a+b+c = k+(-(3k+1))+2k+1$
$= k-3k-1+2k+1 = 0$

(*) si $k \neq 0$

donc $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{2k+1}{k}$

$\mathcal{C}_f \cap D_k = \left\{(1,0), \left(\frac{2k+1}{k}, \frac{\frac{2k+1}{k}-1}{\frac{2k+1}{k}-2}\right)\right\}$

$= \left\{(1,0), \left(\frac{2k+1}{k}, k+1\right)\right\}$.

(*) si $k = 0$

$\begin{cases} y = \frac{x-1}{x-2} \\ y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \mathcal{C}_f \cap D_0 = \{(1,0)\}$.

5) $g(x) = \frac{|x|-1}{|x|-2}$

a) g existe si $|x|-2 \neq 0$

$\Rightarrow |x| \neq 2 \Rightarrow x \neq -2$ et $x \neq 2$

$\Rightarrow D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

b) si $x \in D_g$, $-x \in D_g$ car D_g est symétrique.

$g(-x) = \frac{|-x|-1}{|-x|-2} = \frac{|x|-1}{|x|-2} = g(x)$

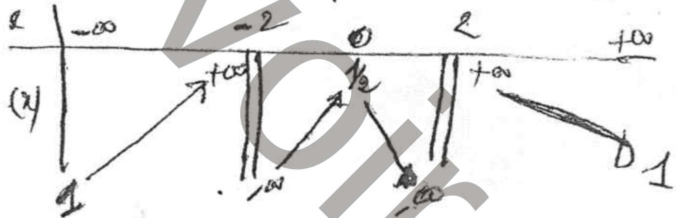
$\Rightarrow g$ est paire.

-) si $x \in [0,+\infty[\setminus \{2\}$

$g(x) = f(x)$ donc on trace g sur $[0,+\infty[\setminus \{2\}$ et on complète par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées car g est paire.

Sur $[0,+\infty[\setminus \{2\}$, $\mathcal{C}_g \equiv \mathcal{C}_f$

) D'après le graphique on a :



Exercice 3 : $A(3,1)$ et $B(1,0)$

1) a) $\Delta = (AB) : y = ax+b$

$A \in (AB) \Rightarrow 1 = 3a+b$

$B \in (AB) \Rightarrow 0 = a+b$

$\Rightarrow \begin{cases} 3a+b=1 \\ a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a=1 \\ b=-a \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}$

donc $\Delta = (AB) : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

) $C(x,y) \in \Delta \cap (O,\vec{i})$

$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

$\Rightarrow C(1,0)$

2) a) $d(O,\Delta) = \dfrac{\left|\frac{1}{2}\times 0 + (-1)\times 0 - \frac{1}{2}\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2}}$

$= \dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt5}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt5}$

b) $\mathcal{A}(OAB) = \dfrac{d(O,\Delta)\times AB}{2}$

$= \dfrac{\frac{1}{\sqrt5}\times AB}{2} = \dfrac{AB}{2\sqrt5}$

$AB = \sqrt{(1-3)^2+(0-1)^2} = \sqrt5$

donc $\mathcal{A}(OAB) = \dfrac{\sqrt5}{2\sqrt5} = \dfrac{1}{2}$

3) $(\mathcal{C}) : x^2+y^2-6x-2y+5=0$

a) $(\mathcal{C}) : x^2+y^2-6x-2y+5=0$

$\Rightarrow x^2-6x+9-9+y^2-2y+1-1+5=0$

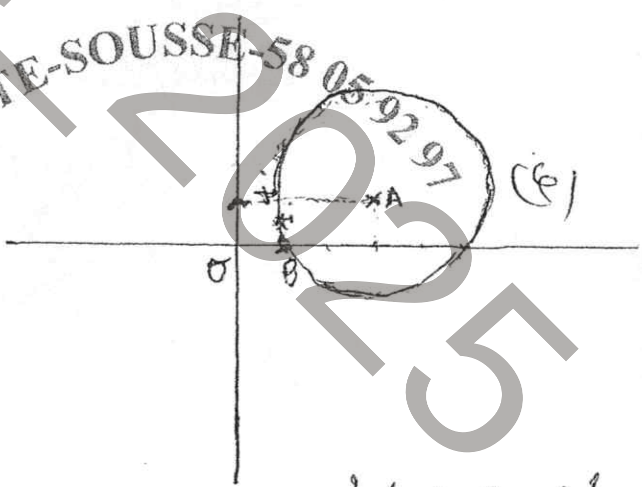
$\Rightarrow (x-3)^2+(y-1)^2 = 5$

$\Rightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt5)^2$

donc $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre $A(3,1)$ et de rayon $\sqrt5$

b) $(1-3)^2+(0-1)^2 = 4+1 = 5 = (\sqrt5)^2$

$\Rightarrow B(1,0) \in \mathcal{C}$.



c) $\mathcal{C} \cap (O,\vec{i}) = \{(1,0),(5,0)\}$.

4) $m \in \mathbb{R}$

$\Delta_m = D(I, \vec{AB})$ avec $I(m,0)$

$M(x,y) \in \Delta_m \Leftrightarrow$ il existe α tq $\vec{IM} = \alpha\vec{AB}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-m \\ y-0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-m = -2\alpha \\ y = -\alpha \end{cases}$

$\Leftrightarrow x - m = 2y$

$\Leftrightarrow -x + 2y + m = 0$

$\Leftrightarrow \Delta_m : x + 2y + m = 0$

b) $d(A, \Delta_m) = \dfrac{|3 + 2\times 1 + m|}{\sqrt{1^2 + 2^2}}$

$= \dfrac{|m-1|}{\sqrt{5}}$

c) Δ_m est tangente à $\mathcal{C}$

$\Leftrightarrow d(A, \Delta_m) = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow \dfrac{|m-1|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |m-1| = 5$

$\Leftrightarrow m-1 = -5$ ou $m-1 = 5$

$\Leftrightarrow m = -4$ ou $m = 6$