Lycée Pilote F-H Sfax	Devoir de Synthèse N°3	2ème année Sc
Mmes Fehri ;Megdich ; Tounsi ; Mrs Hadj Kacem et Dammak		Durée 2 heures

1s 2019

Exercice 1 :(9 pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f et par $\mathscr{C}_g$ celle de g.

1°) Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

2°) Montrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent en deux points dont on précisera les abscisses.

3°) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x+1} \le \dfrac{x+1}{x-1}$.

4°) Soit Δ la droite d'équation: $y = x - 1$.

a. Calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_g$ et Δ.

b. Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x.g(x) \ge x^2 - x$.

5°) Soit h la fonction définie par $h(x) = \dfrac{|x+1|}{1-x}$.

On désigne par $\mathscr{C}_h$ la courbe représentative de h dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a.Tracer $\mathscr{C}_h$ à partir de $\mathscr{C}_g$

b. Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$: $|h(x)+1| < 2$.

6°) Soit D la droite d'équation: $y = x$.

a. Soit $M(x,y)$ un point du plan et $N(x',y')$ son symétrique par rapport à D. Montrer que $x' = y$ et $y' = x$.

b. Montrer alors que si M appartient à $\mathscr{C}_f$ alors N appartient à une parabole P dont on donnera une équation.

Exercice 2 :(5 pts)

Dans un repère orthonormé$(O,\vec{i},\vec{j})$, on donne les points $A(-3,-5)$ et $B(1,3)$.

Soit $\mathscr{C} = \{M(x,y) \in P$ tels que $MA^2 + MB^2 = 60\}$.

1°) Montrer que $\mathscr{C}$ est le cercle de centre I milieu de [AB] et de rayon $R = \sqrt{10}$.

2°) Calculer les coordonnées des points E et E' d'intersection de $\mathscr{C}$ et de la droite des ordonnées sachant que $y_E > 0$.

3°) Calculer les coordonnées des points F et F' d'intersection de $\mathscr{C}$ et de la droite des abscisses sachant que $x_F > 0$.

4°) a. Montrer que le quadrilatère EFE'F' est un trapèze isocèle.

b. Calculer l'aire du trapèze EFE'F'.

5°) Soit $\mathscr{C}'$ le cercle de centre A et de rayon $R' = \sqrt{30}$

a. Montrer que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont sécants. On notera H et K leurs points d'intersection.

b. Sans chercher les coordonnées de H et K, montrer que AHBK est un losange.

Exercice 3 :(6 pts)

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O situé dans un plan P.

[AC] et [BD] sont deux diamètres de $\mathscr{C}$.

E est un point de la perpendiculaire à P en A et F est un point de la perpendiculaire à P en B tels que AE = BF.

On suppose que AB = 2AE = 2AD = 2a ; a un réel strictement positif.

1°) a. Montrer que la droite (CD) est perpendiculaire au plan (ADE).

b. Montrer que les plans (CDE) et (ADE) sont perpendiculaires.

2°) a. Montrer que CDEF est un rectangle.

b. Calculer en fonction de a le volume du prisme droit ADEBCF.

3°) Soit K le milieu de [EC].

Montrer que (OK) est l'axe du cercle $\mathscr{C}$.

4°) a. Montrer que (ABK) est le plan médiateur du segment [ED].

b. Montrer que les plans (ABK)et (EFC)sont perpendiculaires.

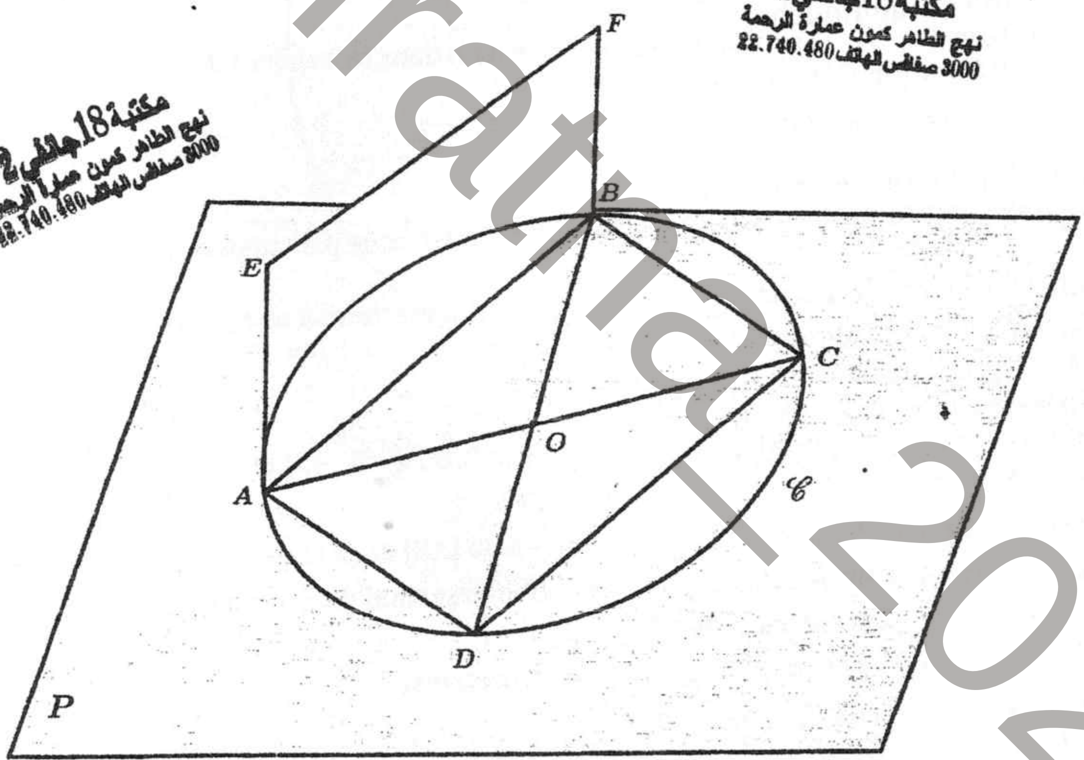
5°) Soit Δ l'axe du cercle circonscrit au rectangle EFCD et J le milieu de [AB].

a. Montrer que Δ est incluse dans le plan (ABK).

b. Déduire que Δ coupe [AB] en J.

6°) a. Montrer que le prisme ADEBCF est inscrit dans une sphère dont on précisera le centre et le rayon R.

b. Calculer R en fonction de a.



Lycée Pilote Sfax — Devoir de synthèse N°3 — $2^{ème}$ Sc.

Exercice 1

1) $\mathcal{C}_f : y = f(x) = \sqrt{x+1}$; $\mathcal{C}_g : y = g(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

2) $M(x,y) \in \mathcal{C}_f \cap \mathcal{C}_g$ équivaut à $x \in [-1,1[\cup]1,+\infty[$; $y = f(x) = g(x)$

$x \in [-1,1[\cup]1,+\infty[$; $t = \sqrt{x+1} \geq 0$, $t \neq \sqrt{2}$, $\sqrt{x+1} = \frac{x+1}{x-1}$ équivaut à $t = \frac{t^2}{t^2-2}$ équivaut à

$t(t^2-2) = t^2$ équivaut à $t(t^2-2) - t^2 = 0$ équivaut à $t(t^2-t-2) = 0$

équivaut à $t = 0$ ou $t^2 - t - 2 = 0$ équivaut à $t = 0$ ou $t = -1$ à rejeter ou $t = 2$

donc $\sqrt{x+1} = 0$ ou $\sqrt{x+1} = 2$ càd $x = -1$ ou $x = 3$

$\mathcal{C}_f \cap \mathcal{C}_g = \{M_1(-1,0) ; M_2(3;2)\}$

3) $\sqrt{x+1} \leq \frac{x+1}{x-1}$; $\mathcal{C}_g$ est au dessus de $\mathcal{C}_f$. $S_{\mathbb{R}} = [-1,1[\cup]1,3]$

4) $\Delta : y = x - 1$

a) $M(x,y) \in \Delta \cap \mathcal{C}_g$ équivaut à $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$; $y = g(x) = x - 1$

$g(x) = x - 1$ équivaut à $\frac{x+1}{x-1} = x - 1$ équivaut à $x + 1 = x^2 - 2x + 1$

équivaut à $x^2 - 3x = 0$ équivaut $x = 0$ ou $x = 3$.

$\Delta \cap \mathcal{C}_g = \{M_2(3,2) ; M_3(0;-1)\}$

b) $x\,g(x) \geq x^2 - x$ équivaut à $x\,g(x) - x(x-1) \geq 0$ équivaut à

$x(g(x) - (x-1)) \geq 0$ équivaut à ($x \in [0,1[\cup]1,+\infty[$ et $\mathcal{C}_g$ au dessus de Δ) ou ($x \in]-\infty,0]$ et $\mathcal{C}_g$ au dessous de Δ)

$S_{\mathbb{R}} =]1,3] \cup \{0\}$

5) $h(x) = \frac{|x+1|}{1-x}$; $D_h = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

a) Si $x \in]-\infty,-1]$; $|x+1| = -(x+1)$ donc $h(x) = \frac{x+1}{x-1} = g(x)$.

$\mathcal{C}_{h/]-\infty,-1]} = \mathcal{C}_{g/]-\infty,-1]}$

Si $x \in [-1,1[\cup]1,+\infty[$; $|x+1| = (x+1)$ donc $h(x) = -\frac{x+1}{x-1} = -g(x)$

$\mathcal{C}_{h/[-1,1[\cup]1,+\infty[} = S_{(O,\vec{i})}(\mathcal{C}_{g/[-1,1[\cup]1,+\infty[})$

b) $|h(x) + 1| < 2$ équivaut à $-2 < h(x) + 1 < 2$ équivaut à $-3 < h(x) < 1$

$\Delta_1 : y = -3$; $\Delta_2 : y = 1$. $\mathcal{C}_h$ est au dessous de Δ_1 (strictement) et $\mathcal{C}_h$ au dessus de Δ_1 (strictement). $S_{\mathbb{R}} =]2, +\infty[$

6) $D : y = x$; $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D

a) $M(x,y)$; $N(x',y') = S_D(M(x,y))$ donc $\vec{MN}\begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\end{pmatrix} \cdot \vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 0$ et

$M * N = K\left(\frac{x+x'}{2} ; \frac{y+y'}{2}\right) \in \Delta$

on a : $x'-x+y'-y=0$ et $x+x'=y+y'$ càd $\begin{cases} x'+y'=x+y \\ x'-y'=-x+y \end{cases}$

d'où $x'=y$ et $y'=x$.

b) si $M(x,y) \in \mathscr{C}_f$ alors $N(y,x)$ d'où $N(\sqrt{x+1}, x)$.

Soit $X_N = \sqrt{x+1} \geq 0$; $Y_N = X_N^2 - 1$. $N(X_N ; X_N^2 - 1)$; $X_N \geq 0$

$N \in P$, la parabole d'équation $P : y = x^2 - 1$

Exercice 2

1) $A(-3,-5)$; $B(1,3)$; I le milieu de $[AB]$; $I(-1;-1)$

$M(x,y) \in \mathscr{C}$ équivaut à $MA^2 + MB^2 = 60$ équivaut à $(x+3)^2 + (y+5)^2 + (x-1)^2 + (y-3)^2 = 60$

équivaut à $x^2 + 6x + 9 + y^2 + 10y + 25 + x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 - 60 = 0$ équivaut à

$2x^2 + 4x + 2y^2 + 4y - 16 = 0$ équivaut à $x^2 + 2x + y^2 + 2y - 8 = 0$ équivaut à

$(x+1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1 - 8 = 0$ équivaut à $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 10 = \sqrt{10}^2$ équivaut à

$M(x,y) \in \mathscr{C}(I(-1,-1) ; R = \sqrt{10})$.

Conclusion : $\mathscr{C} = \mathscr{C}(I(-1,-1) ; R = \sqrt{10})$.

2) $M(x,y) \in \mathscr{C} \cap (O,\vec{j})$ équivaut à $x=0$ et $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 10$

on a : $x = 0$ donc $(y+1)^2 = 9$ d'où $y+1 = 3$ ou $y+1 = -3$ d'où $y = 2$ ou $y = -4$

$\mathscr{C} \cap (O,\vec{j}) = \{E(0,2), E'(0,-4)\}$

3) $M(x,y) \in \mathscr{C} \cap (O,\vec{i})$ équivaut à $y = 0$ et $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 10$

on a : $y = 0$ donc $(x+1)^2 = 9$ d'où $x+1 = 3$ ou $x+1 = -3$ d'où $x = 2$ ou $x = -4$

$\mathscr{C} \cap (O,\vec{i}) = \{F(2,0) ; F'(-4,0)\}$

4) a) $\vec{EF}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$; $\vec{F'E'}\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix} = 2\vec{EF}$; $\vec{EF'}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$; $\vec{FE'}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{EF}$ et $\vec{FE'}$ sont colinéaires ; EFE'F' est un trapèze isocèle car

$EF' = \sqrt{20}$; $FE' = \sqrt{20} = EF'$.

4) $(EE') \cap (FF') = O$; $\mathcal{A}(EFE'F') = \dfrac{FF' \times EE'}{2} = \dfrac{6 \times 6}{2} = 18$

5) a) $\mathcal{C}(I(-1,-1); \sqrt{10})$; $\mathcal{C}'(A(-3,-5); \sqrt{30})$

$AI = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20} = \sqrt{2} \times \sqrt{10}$; $R + R' = (1+\sqrt{3})\sqrt{10}$; $R' - R = (\sqrt{3}-1)\sqrt{10}$

on a : $0 < \sqrt{3}-1 < 1 < \sqrt{2} < 2 < 1+\sqrt{3}$ donc $R'-R < AI < R'+R$ donc $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont sécants en H et K.

b) $IH = \sqrt{10}$; $AH = \sqrt{30}$, $AI = \sqrt{20}$ donc AHI est rectangle I ; $(HI) \perp (AB)$

$(IH) =$ méd $[AB]$ car $I = A * B$.

$IK = \sqrt{10}$; $AK = \sqrt{30}$; $AI = \sqrt{20}$ donc AKI est rectangle en I ; $(KI) \perp (AB)$

$(IK) =$ méd $[AB]$ car $I = A * B$

$HA = HB = AK = BK$ d'où AHBK est un losange.

Exercice 3

1)a) $[AC]$ et $[BD]$ sont deux diamètre de $\mathcal{C}(O, OA)$ donc ABCD est un rectangle.

$(CD) \perp (AD)$

$(AE) \perp P = (ADC)$ donc (AE) est orthogonal à (CD). $(AE) \subset (ADE)$; $(AD) \subset (ADE)$

$(AE) \cap (AE) = A$ donc $(CD) \perp (ADE)$.

b) $(CD) \perp (ADE)$; $(CD) \subset (CDE)$ donc $(ADE) \perp (CDE)$

2°) a) $(AE) \perp P$; $(BF) \perp P$ donc $(AE) // (BF)$; $AE = BF$ donc ABFE est un rectangle.

$(EF) // (AB)$; $(AB) // (CD)$ donc $(EF) // (CD)$; $EF = AB$, $AB = CD$ donc CDEF est un parallélogramme ; $(CD) \perp (ADE)$; $(DE) \subset (ADE)$ donc $(CD) \perp (DE)$ d'où CDEF est un rectangle.

b) $V_{ADEBCF} = \dfrac{1}{3} \times AB \times \dfrac{AD \times AE}{2} = \dfrac{1}{6} \times 2a \times a^2 = \dfrac{a^3}{3}$

3°) a) ACE est rectangle en A ; $K = E * C$ donc $KA = KC$; CDFE est un rectangle donc $KD = KC$ d'où $KA = KC = KD$. d'où K est un point de l'axe du cercle $\mathcal{C}$.

O le centre de $\mathcal{C}$, $O \neq K$ donc (OK) est l'axe du cercle $\mathcal{C}$

4) a) $KE = KD$; $AE = AD$; $BE = BD = \sqrt{5}a$ d'où (ABK) est le plan médiateur de $[ED]$ car, A, B et K ne sont pas alignés

b) $(ED) \perp (ABK)$; $(ED) \subset (EFC)$ donc $(ABK) \perp (EFC)$.

5) a) Δ l'axe du cercle circonscrit au rectangle EFCD. $K \in \Delta$

$\Delta \perp (CDK)$; $(CDK) \perp (ABK)$ donc $\Delta \subset (ABK)$. car $\Delta \not\parallel (ABK)$; $K \in \Delta$

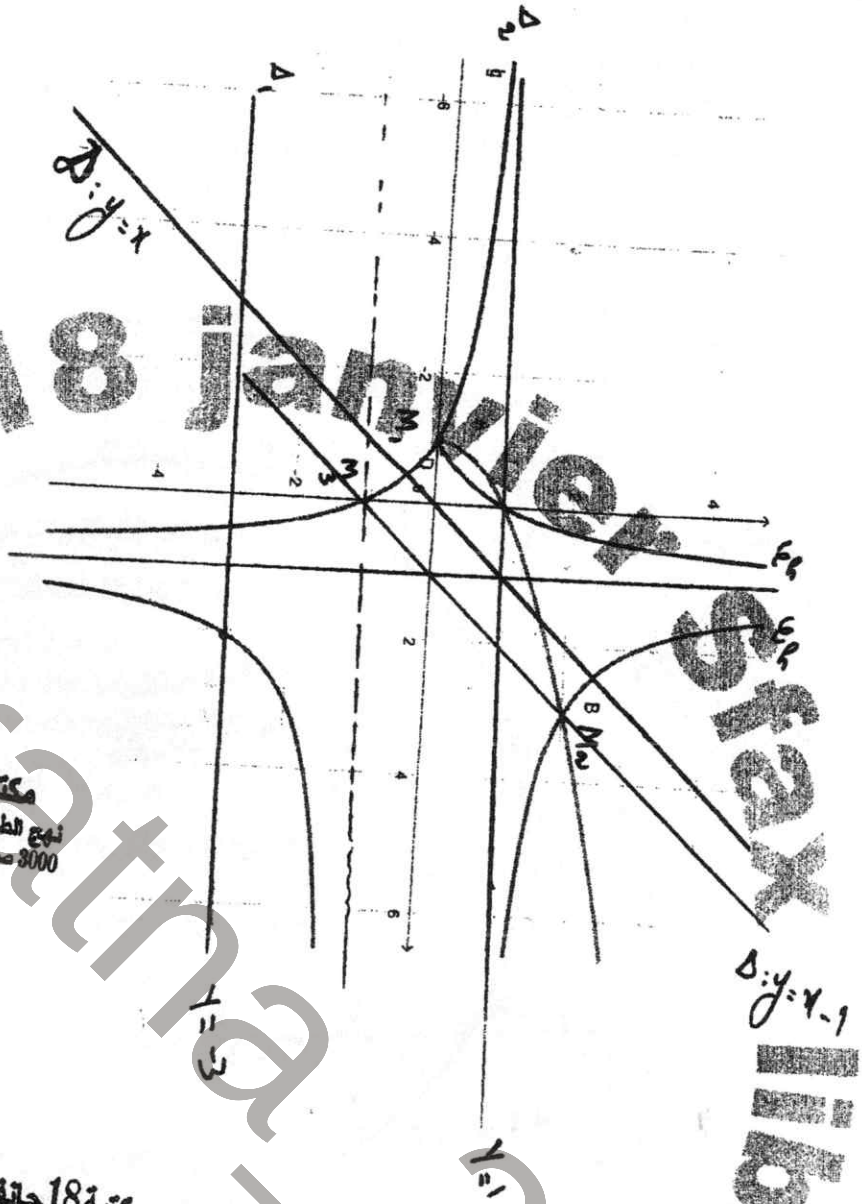
b) $KB = KA$; $J = A * B$ donc $(KJ) \perp (AB)$; (ABK) coupe (CDK) suivant une droite $(KL') \parallel (AB)$

$(KL') \perp \Delta$; $(KJ) \perp (AB)$ d'où $\Delta = (KJ)$

6) a) $KA = KE = KF = KC = KD = KB$ donc ADEBCF est inscrit dans $S(K ; KA)$.

b) $R = \frac{1}{2} EC$, $EC^2 = AC^2 + AE^2 = a^2 + 4a^2 + a^2 = 6a^2$; $EC = \sqrt{6}\,a$; $R = \frac{\sqrt{6}}{2} a$.

B
E
H
F'
C
I
F
K
E'
A



مكتبة 18 جانفي 2
نهج الطاهر كمون عمارة الرحمة
3000 صفاقس الهاتف 22.740.480