Niveau : 2ème Sciences	Devoir de synthèse n° 3	Lycée Pilote Gabès 2022/2023

NOM...........................PRENOM...........................

6/6

❖EXERCICE 1 (8 points)

Pour le traçage des courbes on utilisera des couleurs différentes.

Soit la fonction f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \to \frac{2}{x}$. On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Étudier la parité de f.

b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

c) Tracer la courbe (C_f) dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2. Soit la fonction g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \to -x^2 + 2x + 2$. On note (C_g)sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^*, g(x) = f(x) + 2$.

b) Tracer la courbe (C_g) dans le même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3. Soit la fonction h : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \to \frac{2x+2}{|x|}$. On note (C_h) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Tracer à partir de (C_f) la courbe (C_h) dans le même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b) En déduire le tableau des variations de la fonction h.

c) Déterminer, graphiquement, suivant les valeurs du réel m le nombre des solutions de l'équation : m|x| - 2x - 2| = 0.

d) Résoudre graphiquement l'équation : |h(x)| + h(x) = 6.

❖EXERCICE 2 (6 points)

On donne dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.les points A(0, 3) et B(4, -5).

On désigne par (C) le cercle de diamètre [AB].

1. a) Déterminer le centre I et le rayon R du cercle (C).

2. Soit Δ la droite d'équation : $x - 2y + 6 = 0$.

a) Montrer que Δ est perpendiculaire à (AB).

b) Montrer que (C) et Δ sont tangents et déterminer les coordonnées du leur point de contact.

3. Soit m un réel différent de 1. On désigne par (C_m) l'ensemble des points M(x,y) du plan vérifiant :

$$x^2 + y^2 - 2(2m+1)x + 2(m-1)y + 12m - 3 = 0.$$

a) Déterminer l'ensemble (C_1).

b) Montrer que pour tout réel $m \neq 1$, (C_m) est un cercle dont on précisera le centre I_m et le rayon R_m.

c) Montrer que tous les centres I_m sont alignés.

d) Déterminer m pour que le cercle (C_m) soit sécant à Δ.

❖EXERCICE 3 (6 points)

Dans l'espace on considère un tétraèdre ABCD tel que les faces BAC et BDA sont des triangles rectangles et isocèles en B et la face ACD est un triangle équilatéral.

Soit M le milieu du segment [CD] et le point E centre du gravité du triangle ACD. On se propose d'étudier le plan (BCD) et d'étudier le plan E sur le plan (BCD).

1. a) Montrer que BC = BD.

b) En déduire que (ABI) est le plan médiateur du segment [CD].

c) Montrer que (AB) est perpendiculaire au plan (BCD).

d) Montrer que les plans (ABI) et (BCD) sont perpendiculaires.

2)a) Montrer que (AB) est l'axe du cercle circonscrit au triangle ACD.

b) déduire que BEI est un triangle rectangle en E

3. a) Vérifier que (BI) est la droite l'intersection des plans (ABI) et (BCD).

b) Déduire que B, F et I sont aligné.

❖ Exercice 1

1) a) $D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0; +\infty[$

$x \neq 0 \Rightarrow -x \neq 0 \Rightarrow -x \in D_f$

1) $f(-x) = \frac{2}{-x} = -f(x)$

donc f est impaire

b) Sur $]-\infty; 0[$

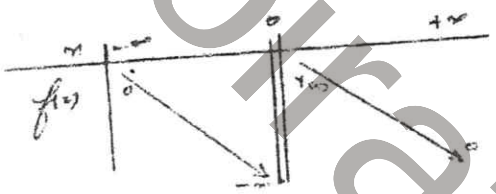
$a < b < 0$

$\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

$f(b) < f(a)$

$\Rightarrow f \searrow$

et sur $]0, +\infty[$ $f \searrow$



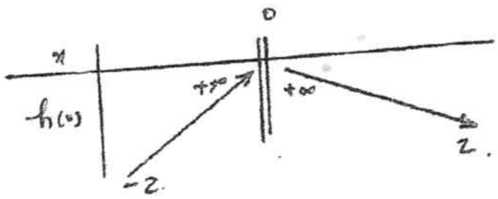
$\mathcal{C}_f$ est un hyperbole de centre $I(0;0)$

$x = 0$ AV et $y = 0$ AH.

2 a) $g(x) = \frac{2x+2}{x} = \frac{2x}{x} + \frac{2}{x} = 2 + \frac{2}{x} = f(x) + 2$

Voir Annexe.

b) TV (h)



c)

$m|x| - 2x - 2 = 0$

$m|x| = 2x + 2; x \neq 0$

$m = \frac{2x+2}{|x|}$

$h(x) = m$ n'a pas de sol Si $m \leqslant -2$

une sol si $m \in]-2; 2]$

deux Sol si $m > 2$

d)

$|h(x)| + h(x) = 6$

$|h(x)| = 6 - h(x) \Leftrightarrow 6 - h(x) \geqslant 0$

$h(x) \leqslant 6$ alors Si $x > 0$ $\frac{2x+2}{x} = 6 \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

si $x < 0$ $\frac{2n+2}{-n} = 6 \Rightarrow x = \left(-\frac{1}{4}\right)$

$S =]-\infty; -\frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{2}; +\infty[$

❖ Exercice 2

$\mathcal{C}$(diamètre $[AB]$)

1)

$A * B = (2; -1)$

Rayon $= \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{16+64}}{2} = \frac{\sqrt{16 \times 5}}{2} = 2\sqrt{5}$.

Donc

C: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 20 = (2\sqrt{5})^2$.

$\mathcal{C}(I(2;-1); R = 2\sqrt{5})$

2) $\Delta: x - 2y + 6 = 0$

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Vect directeur de Δ.

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$

$2 \times 4 + 1 \times (-8) = 8 - 8 = 0 \Rightarrow \Delta \perp (AB)$

b) $d(I(2;-1); \Delta: x - 2y + 6) = \frac{|2+2+6|}{\sqrt{1+4}}$

$= \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5} =$ Rayon

donc Δ et tang a $\mathcal{C}$ en J

$J(x,y) \in \Delta \Rightarrow x = 2y - 6$.

$J(x,y) \in \mathcal{C} \Rightarrow (2y - 6 - 2)^2 + (y+1)^2 = 20$

$\Rightarrow (2y-8)^2 + (y+1)^2 = 20$

$\Rightarrow 4y^2 - 32y + 64 + y^2 + 2y + 1 = 0$

$5y^2 - 30y + 45 = 0$

$y^2 - 6y + 9 = 0$

$a = 1$

$b = (-6)$

$C = 9$

$\delta = 36 - 36 = 0 \Rightarrow y = \frac{-b}{2a} = \left(\frac{-9}{2}\right)$

$J\left(-15; -\frac{9}{2}\right)$ $\mathcal{C} \cap \Delta = \left\{\left(-15; -\frac{9}{2}\right)\right\}$

3)a)

$m \neq 1$

$\mathcal{C}_m: x^2 - 2(2m+1)x + y^2 + 2(m-1)y + 12m - 3 = 0$

$-(2m+1))^2-(2m+1)^2+(y+m-1)^2-(m-1)^2=$
$-12m+3$
$(x-(2m+1))^2+(y-(-m+1))^2$
$=4m^2-4m-1-m^2+2m-1=-12m+3$

b)

$$(x-(2m+1))^2+(y-(1-m))^2=5m^2-10m+5$$
$$=5(m^2-2m+1)$$
$$=5(m-1)^2>0$$
car $m \neq 1$

donc $\mathcal{C}$ est un cercle de centre $I_m(2m+1;1-m)$ et de rayom $R_m=|m-1|\sqrt{5}$

c) $I_{m+1}(2m+3;-m)$; $I_{m-1}(2m-1;2-m)$

Det $(\overrightarrow{I_m I};\overrightarrow{I_m I_{m-1}})=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2-2=0$

donc tous les centres I_m sont alignes.

d) $d(I_m;\Delta)=\frac{|2m+1+2n-2+6|}{\sqrt{1+4}}=\frac{|4m+5|}{\sqrt{5}}$

<Rayon

$$\frac{|4m+5|}{\sqrt{5}}<(m-1)\sqrt{5}\Rightarrow|4m+5|<5|m-1|$$
$$\left|\frac{4m+5}{m-1}\right|<5\Rightarrow-5<\frac{4m+5}{m-1}<5$$

❖ Exercice 3

$$AC=CD=AD$$

1) E centre de gravité de ACD

a) $BC=BD=BA$ car BCA et BDA sont isocèles.

b)

$$AC=AD$$
$$BC=BD$$
$$FC=ID$$

***donc* (ABI) plan médiateur de [CD]**

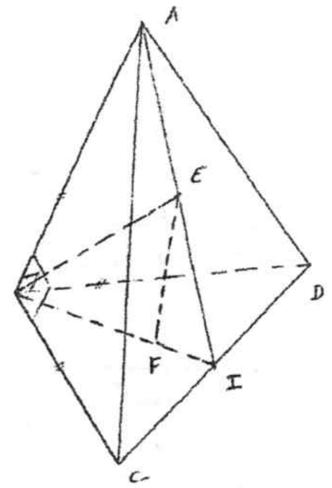
c) $(AB)\perp(BD)$

$(AB)\perp(BC)$
$\Rightarrow (AB)\perp(BCD)$

d) $(AI)\perp(CD)$ et $(AB)\perp(BCD)\Rightarrow(ABI)\perp(BCD)$

2) a) ADC triangle équilatéral

E centre de gravité et donc centre de cercles circonscrit au triangle ACD: $\mathcal{C}$ et $BA=BC=BD$



donc (BE) Axe du cercle $\mathcal{C}$.

b) $(BE)\perp(ADC)\Rightarrow(BE)\perp(EI)$

$\Rightarrow BEF$ triangle rectangle en E

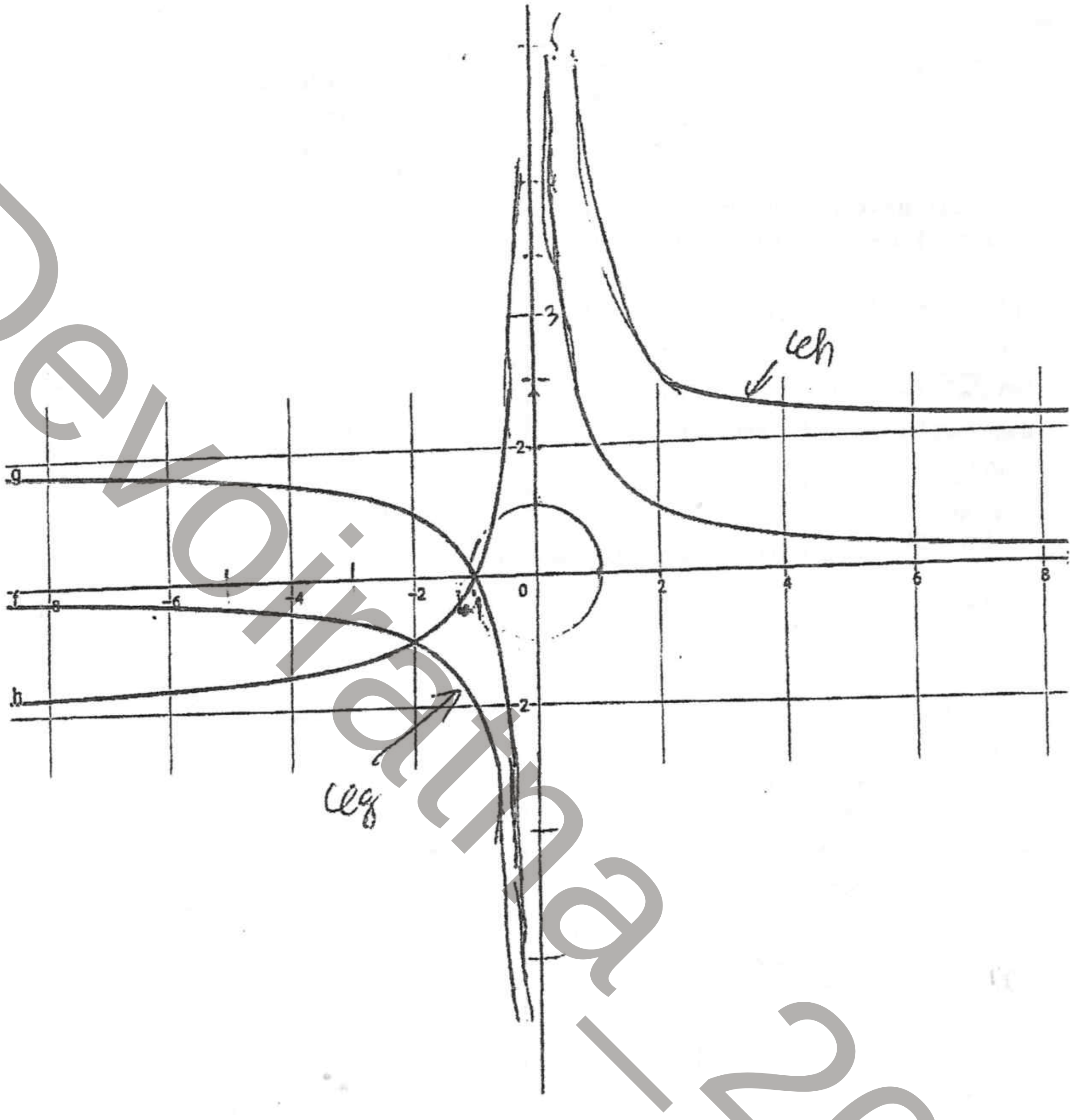
3)a) on a (BI) $\subset (BCD)$

(BI) $\subset (ABI)\Rightarrow(BCD)\cap(ABI)=(BI)$

b)

on a $(AB)\perp(BI)$
$(EF)\perp(BCD)$
$\Rightarrow (AB)//(EF)$
$\Rightarrow F\in(BI)$

B; F et I Sont alignes



g
f
h
$\mathscr{C}_h$
$\mathscr{C}_g$