2 année sc L-P-S	Série d'exercices N° : ….. (Mathématiques)	Mr Hadjkacem

Exercice 1 :

Soit A et B deux points distincts et x un réel

1) Justifier l'existence du point G barycentre des points pondérés $(A\,;3x^2+4x+1)$ et $(B\,;x^2-x)$
2) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles les points G et B sont confondus
3) Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels $G \in [AB]$
4) Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels $A \in [BG]$

Exercice 2 :

Résoudre dans IR^2

1) $\begin{cases} x^3+y^3=19 \\ x+y=1 \end{cases}$ 2) $|x^2+y^2-68|+(xy+16)^2=0$

Exercice 3 :

Soit ABCD un parallélogramme du plan,

1) Construire le point I barycentre des points pondérés (A, 2) et (D, −5)
2) La droite (BI) coupe (CD) en un point J
   a) Ecrire le point J comme barycentre de B et I affectés de coefficients que l'on précisera
   b) Ecrire le point J comme barycentre de C et D affectés de coefficients que l'on précisera
3) La droite (IC) coupe (AB) en un point K
   Ecrire le point K comme barycentre de A et B affectés de coefficients que l'on précisera

Exercice 4 :

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère cartésien du plan

On donne les points $A(-1;3)$, $B(5;-9)$ et $C(\frac{1}{2};0)$

1) Déterminer deux réels a et b ayant un produit $\frac{4}{3}$ et tel que C est le barycentre de (A, a), (B, b)
2) Déterminer les coordonnées du point G barycentre de (A, 3), (B, 1), (O, 1)

Exercice 5 :

Soit ABC un triangle.

On désigne par O le milieu de $[BC]$, I le barycentre de (A, 2), (B, −3) et J le barycentre de (A, 3), (C, −1)

1) Exprimer $\overrightarrow{AO}$ en fonction des deus vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
2) Déduire que O est le barycentre des points A, I et J affectés de coefficients que l'on précisera

Exercice 6 :

Soit $A(x)=ax^2+bx+c$ $(a\in IR^*,\ b\in IR,\ c\in IR)$

On suppose que A(1) < 0 , A (-2) = -2 et A (−1) = 0. Exprimer A(x) en fonction de x

Exercice 7 :

Soit ABC un triangle. On définit les points M, N et P par les égalités vectorielles suivante

$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{NA}-2\overrightarrow{CN}=\vec{0}$ $\overrightarrow{PC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Montrer que les points M, N et P sont alignés.

L-P-Sfax
2020-2021

Serie d'exercices

Mr Hadjkacem
2sc

Exercice 1 :

1) L'existence de G nécessite que la somme des coefficient soit non nulle.

$(3x^2+4x+1)+(x^2-x) = 4x^2+3x+1$

$\Delta = -7 < 0$

Donc $4x^2+3x+1 > 0$, pour $\forall x \in \mathbb{R}$

d'où l'existe de G bpp $(A, 3x^2+4x+1), (B, x^2-x)$; pour $\forall x \in \mathbb{R}$

2) G et B sont confondus

équivaut $3x^2+4x+1=0$; (Le coeff associé à A est nul)

$a-b+c=0$ Donc $x=-1$ ou $x=-\frac{1}{3}$

Cl : G et B sont confondus ssi $x \in \{-1, -\frac{1}{3}\}$.

3) $G \in [AB]$ équivaut $(3x^2+4x+1)\cdot(x^2-x) \geq 0$

Le trinôme $3x^2+4x+1$ admet -1 et $-\frac{1}{3}$ comme racine

Le trinôme x^2-x s'annulle en 0 et en 1

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		0		1		$+\infty$
$3x^2+4x+1$		+	0	−	0	+		+		+	
x^2-x		+		+		+	0	−	0	+	
P		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

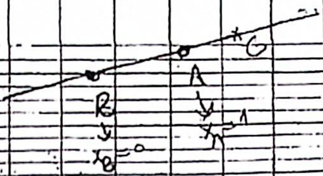
Donc $G \in [AB]$ ssi $x \in]-\infty; -1] \cup [-\frac{1}{3}; 0] \cup [1; +\infty[$.

4) G bpp $(A, 3x^2+4x+1), (B, x^2-x)$

équivaut $\vec{BG} = \frac{3x^2+4x+1}{4x^2+3x+1}\vec{BA}$ équivaut $x_G = \frac{3x^2+4x+1}{4x^2+3x+1}$

dans le repère $(B, \vec{BA})$

$A \in [BG]$ ssi $x_G \geq x_A$



ssi $\dfrac{3x^2+4x+1}{4x^2+3x+1} \geq 1$

$4x^2+3x+1$ est un trinôme (de discriminant $\Delta<0$ et $a=4>0$, Donc $4x^2+3x+1>0$, pour tout $x\in\mathbb{R}$)

ssi $3x^2+4x \geq 0$

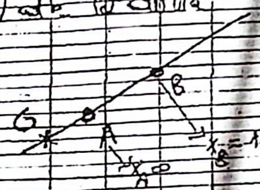
$3x^2+4x=0$

$x=0$ ou $x=-\frac{4}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		0		$+\infty$
$3x^2+4x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Cl : $A\in[BG]$ ssi $x \in \left]-\infty, -\frac{4}{3}\right] \cup [0, +\infty[$

On pourra utiliser le repère $(A, \vec{AB})$ de la droite (AB) : $x_G \leq 0$



Exercice 2 :

1) $\begin{cases} x^3+y^3=19 \\ x+y=1 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} (x+y)(x^2-xy+y^2)=19 \\ x+y=1 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} (x+y)^3-3xy=19 \\ x+y=1 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} xy=-6 \\ x+y=1 \end{cases}$

Donc x, y doivent être les solutions de l'équation

$z^2 - z - 6 = 0$

$\Delta = 1+24$

$z_1=-2$ et $z_2=3$

Ainsi $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ d'où $S_{\mathbb{R}^2}=\{(-2,3);(3,-2)\}$

2) $(x^2+y^2-68)^2+(xy+16)^2=0$

équivaut à : $\begin{cases} x^2+y^2-68=0 \\ xy+16=0 \end{cases}$, $\left(\begin{array}{l} (\ )^2 \in \mathbb{R}_+ \\ \text{et } (\ )^2 \in \mathbb{R}_+ \end{array} \right)$ somme nulle

équivaut à : $\begin{cases} (x+y)^2-2xy-68=0 \\ xy=-16 \end{cases}$

équivaut à : $\begin{cases} (x+y)^2=36 \\ xy=-16 \end{cases}$ équivaut à : $\begin{cases} x+y=6 \\ xy=-16 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x+y=-6 \\ xy=-16 \end{cases}$

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations :

$t^2-6t-16=0$; $y^2+6y-16=0$

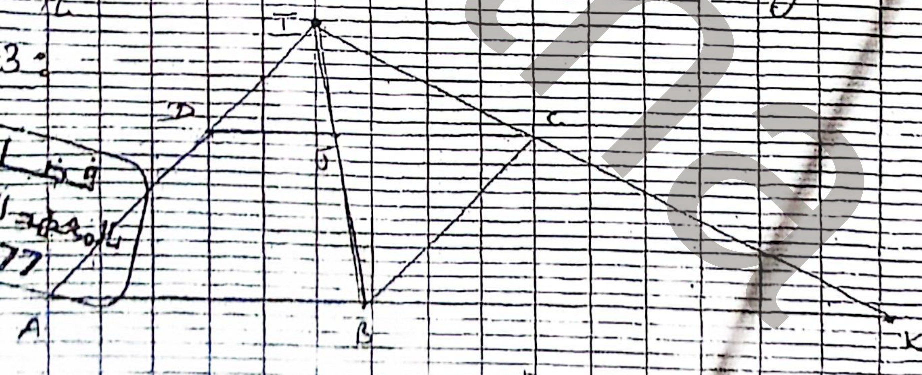
$\Delta=100$; $\Delta_1=100$

$t_1=8$ et $t_2=-2$; $t'=-8$ et $t''=2$

Donc $\begin{cases} x=8 \\ y=-2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=-2 \\ y=8 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=-8 \\ y=2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=2 \\ y=-8 \end{cases}$

D'où $S_{\mathbb{R}^2}=\{(8,-2),(-2,8),(-8,2),(2,-8)\}$.

Exercice 3 :



1) I bpp (A,2) ; (D,5) épà : $\vec{AI}=\frac{5}{3}\vec{AD}$

2) a) I bpp (A,2) ; (D,-5) épà : $2\vec{IA}-5\vec{ID}=\vec{0}$

épà : $\vec{ID}=\frac{2}{5}\vec{IA}$

Appliquons la forme vectorielle de Thalès dans le triangle ABI

$D \in (AI)$; $J \in (IB)$
$(DJ) // (AB)$; $(AB)//(CD)$ et $J \in (CD)$
$\vec{ID} = \frac{2}{5}\vec{IA}$

Donc $\vec{IJ} = \frac{2}{5}\vec{IB}$ et $\vec{DJ} = \frac{2}{5}\vec{AB}$

$\vec{IJ} = \frac{2}{5}\vec{IB}$ équivaut à $\vec{IJ} = \frac{2}{2+3}$

Donc J bpp (I ; 3) ; (B ; 2)

b) $\vec{DJ} = \frac{2}{5}\vec{AB}$ et $\vec{AB} = \vec{DC}$ (ABCD parallélogramme)

Donc $\vec{DJ} = \frac{2}{5}\vec{DC}$ donc J bpp (C ; 2) ; (D ; 3)

3) Appliquons la forme vectorielle du th de Thalès dans IAK

$D \in (AI)$; $C \in (IK)$
$(CD) // (AK)$; $(CD)//(AB)$ et $K \in (AB)$
$\vec{ID} = \frac{2}{5}\vec{IA}$

Donc $\vec{IC} = \frac{2}{5}\vec{IK}$

$\vec{IC} = \frac{2}{5}\vec{IK}$ équivaut à $\vec{IK} = \frac{5}{2}\vec{IC}$

Donc K bpp (C ; 5) ; (I ; -3)

Exercice 4 :

1) $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3/2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ -12 \end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

D'où C bpp $(A, 3)$; $(B, 1)$

Soit k un réel non nul tel que $(3k)\cdot(1k) = \frac{4}{3}$

$k^2 = 4/9$

$k = \frac{2}{3}$ ou $k = -\frac{2}{3}$

On pourra choisir $k = \frac{2}{3}$

et C bpp $(A, 2)$; $(B, \frac{2}{3})$

2) G bpp $(A, 3)$; $(B, 1)$; $(O, 1)$

$\overrightarrow{OG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$

$= \frac{3}{5}(-\vec{i} + 3\vec{j}) + \frac{1}{5}(6\vec{i} - 9\vec{j})$

$\overrightarrow{OG} = \frac{2}{5}\vec{i}$ Donc $G\left(\frac{2}{5} ; 0\right)$

Exercice 5 :

1) O milieu de $[BC]$ et A un point du plan

Donc $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

2) I bpp $(A, 2)$; $(B, -3)$ équivaut $\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AB}$ équivaut $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$

J bpp $(A, 3)$; $(C, -1)$ équivaut $\overrightarrow{AJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ équivaut $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AJ}$

Comme $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AJ}$

$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AI} - \frac{6}{6}\overrightarrow{AJ}$

$= \frac{1}{1+(-6)+1}\overrightarrow{AI} + \frac{-6}{1+(-6)+1}\overrightarrow{AJ}$

Donc G est le bpp $(I;1)$; $(J;-6)$; $(A;1)$

Exercice 6 :

$A(x)$ est un trinôme du second degré qui s'annulle en (-1) et ne change pas de signe de part et d'autre de (-1)

car $A(1)<0$ $A(-2)<0$ et $-1\in]-2,1[$

Donc (-1) est une racine double de $A(x)$

Alors $A(x)=a.(x+1)^2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Or $A(-2)=-2$

Donc $a(-2+1)^2=-2$

$a=-2$

$A(x)=-2(x+1)^2$

$A(x)=-2x^2-4x-2$

Exercice 7 :

a) $\vec{AM}=\frac{2}{5}\vec{AB}$ équivaut $\vec{AM}=\frac{2}{2+3}\vec{AB}$ Donc M bpp $(A,3)(B,2)$

b) $\vec{PC}=-\frac{1}{2}\vec{BC}$ équivaut $\vec{CP}=\frac{-1}{-1+3}\vec{CB}$ Donc P bpp $(B,-1)(C,3)$

N un point du plan et M bpp $(A,3)$; $(B,2)$ Donc $3\vec{NA}+2\vec{NB}=5\vec{NM}$

N un point du plan et P bpp $(B,-1)$; $(C,3)$ Donc $-\vec{NB}+3\vec{NC}=2\vec{NP}$

On élimine $\vec{NB}$ des deux relations on trouve :

$3\vec{NA}+2\vec{NB}+2(-\vec{NB}+3\vec{NC})=5\vec{NM}+2\times2\vec{NP}$

$3\vec{NA}+\vec{NC}=5\vec{NM}+4\vec{NP}$

$3(\vec{NA}-2\vec{CN})=5\vec{NM}+4\vec{NP}$

$3\times\vec{0}=5\vec{NM}+4\vec{NP}$

$\vec{0}=5\vec{NM}+4\vec{NP}$

Donc N appartient $(M;r)$ et $(P;4)$ ... N ...

...